Méthode des moindres carrés

Fabien Navarro

1 Équations linéaires et approximation polynomiale

De nombreux problèmes peuvent se ramener à la résolution d'un système d'équations linéaires, c'est-à-dire par une relation $Ax = b$ où A est une matrice $m \times n$ connue, b un vecteur connu de taille n et x est le vecteur que l'on cherche.

Exercice 1[1]**.**

L'équation du mouvement d'un corps en chute libre à la surface de la terre (sans tenir compte de la résistance de l'air) est de la forme suivante :

$$z(t) = -\frac{1}{2}gt^2 + v_0 t + z(0) \tag{1}$$

où $z(t)$ est la valeur de l'altitude en fonction du temps t, g est la constante de gravitation du lieu, v_0 est la vitesse initiale du corps et $z(0)$ est sa position initiale. $z(t)$ est donc décrit par un polynôme du second degré en la variable t.

Supposons que l'on ait mesuré lors d'une expérience les altitudes $z_1(t), \ldots, z_n(t)$ aux instants $t_1, \ldots, t_n$ et que l'on souhaite estimer les paramètres inconnus (g, v_0 et $z(0)$) de l'équation du mouvement (1). Les paramètres doivent vérifier les n équations :

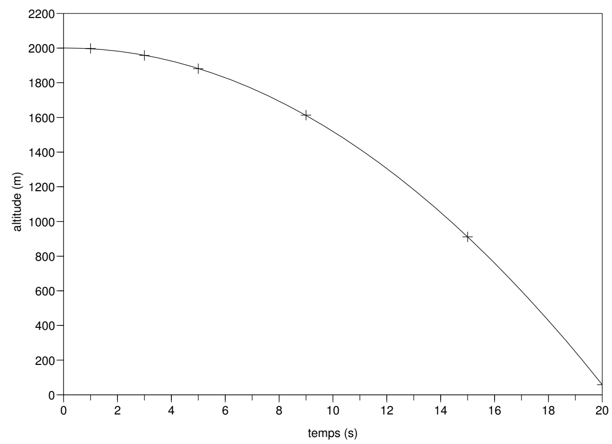
$$z(t_i) = -\frac{1}{2}gt_i^2 + v_0 t_i + z(0) \tag{2}$$

Il y a ici 3 inconnues à déterminer et trois mesures peuvent suffire. Mais pratiquement, compte tenu de l'imprécision des instruments de mesures, on préfère réaliser plus de mesures et ensuite trouver des paramètres permettant de représenter au mieux les données expérimentales. Supposons que l'on ait mesuré :

$$\begin{pmatrix} t(s): & 1 & 3 & 5 & 9 & 15 & 20 \\ z(t)(m): & 1996 & 1959 & 1882 & 1612 & 911 & 58 \end{pmatrix}$$

1) À l'aide des mesures, écrire l'équation (2) sous forme un système d'équations de type $Ax = b$.
2) Calculer la solution (gravité, vitesse initiale et altitude initiale) au sens des moindres carrés du problème $\min ||Ax - b||_2$ à l'aide de la commande \ (cette commande permet de résoudre directement le problème sous la forme $Ax = b$, sans passer par les équations normales, même si la matrice A n'est pas carrée).
3) Représenter graphiquement la trajectoire du corps correspondant aux paramètres estimés ainsi que les points effectivement mesurés.

1. Extrait de : Chancelier, J-P et al. *Introduction à Scilab*, Springer Science & Business Media, 2007

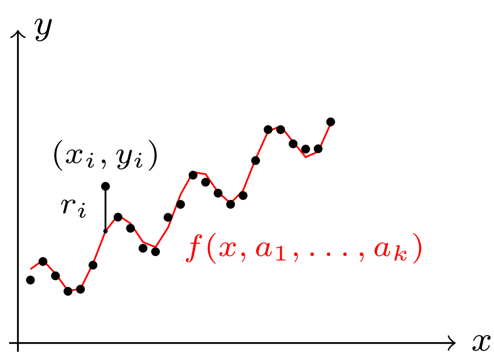


Exercice 2.

On considère un nuage de n points de $\mathbb{R}^2$: $M_i = (x_i, y_i), i = 1, \ldots, n$. On souhaite approcher ce nuage de points aux moindres carrés par une fonction f qui dépend des variables $a_1, \ldots, a_k$:

$$y = f(x, a_1, \ldots, a_k)$$

On note $r_i = y_i - f(x_i, a_1, \ldots, a_k)$, $i = 1, \ldots, n$ les résidus du modèle (*i.e.* la "distance" entre le graphe de f et les points (x_i, y_i)). Nous voulons trouver des valeurs pour les paramètres $a_1, \ldots, a_k$ qui minimisent la somme des carrés des r_i. Soit J la fonction à minimiser.



1) Écrire le problème de minimisation correspondant.
2) Écrire le problème sous la forme d'un système linéaire à k inconnues scalaires et n équations :

$$Ax = y, \tag{3}$$

où, $y \in \mathbb{R}^n$, $A \in \mathcal{M}_{n,k}(\mathbb{R})$, $x \in \mathbb{R}^k$. (indication : comme f dépend linéairement des paramètres a_j, on a $f(x, a_1, \ldots, a_k) = a_1 f_1(x) + \cdots + a_k f_k(x)$)

On cherche la solution (au sens des moindres carrés) qui minimise la somme des carrés des résidus r_i pour la norme euclidienne :

$$\text{Trouver } \hat{x} \text{ tel que : } \|A\hat{x} - y\|^2 = \min_{x \in \mathbb{R}^k} \|Ax - y\|^2 \tag{4}$$

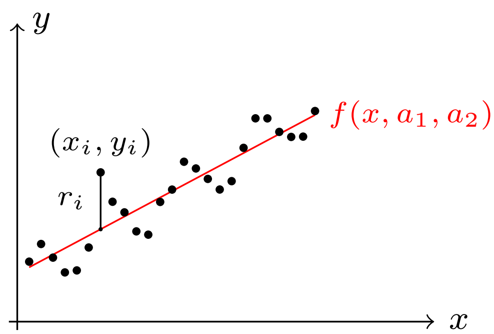
On montre alors qu'une telle solution satisfait les équations normales (*cf.* cours) :

$$\text{Trouver } \hat{x} \text{ tel que : } A^T A\hat{x} = A^T y \tag{5}$$

qui devient un problème de résolution d'un système linéaire. La matrice $A^T A$ est une matrice carrée qui est (en général) inversible et l'équation précédente admet donc une solution unique.

On dispose maintenant de $n = 25$ observations $(x_i, y_i), i = 1, \ldots, 25$ (pour charger les données utiliser la commade Scilab `load('data.dat','x','y')` , attention au chemin).

On souhaite approcher ce nuage de points aux moindres carrés par une droite de régression d'équation $y = a_1 + a_2 x$.



3) Écrire le problème de minimisation correspondant sous la forme du problème (3).

4) Trouver l'estimation au sens des moindres carrés à l'aide de la commande \ (indication : vous pouvez utiliser `ones()`).

5) Résoudre le problème (5) par la méthode de votre choix (`linsolve()`,`inv()`,...)

6) Ouvrir une fenêtre graphique (avec l'instruction `scf(1);`) diviser `(1)` en deux sous-fenêtres et tracer, les observations et l'estimation de la droite de régression (à gauche) et tracer les résidus en fonction de x (à droite) .

7) Á l'aide d'une boucle `for` ajouter les résidus (la "distance" entre le graphe de f et les points (x_i, y_i)) sur le graphique de gauche.

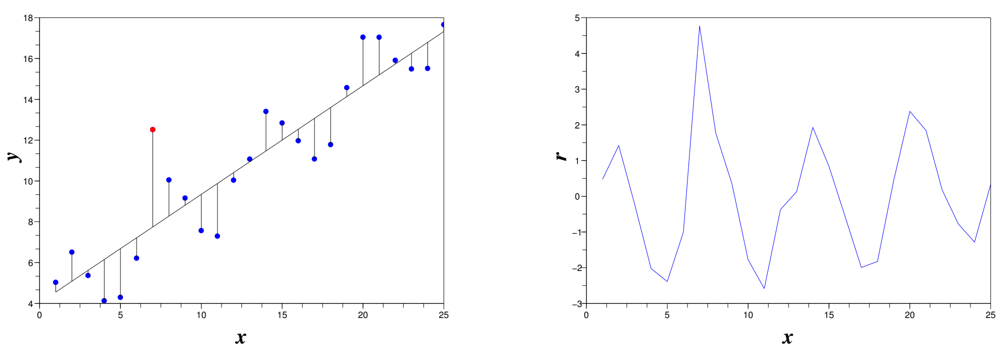


FIGURE 1 – Estimation de la droite de régression et des résidus.

8) On constate qu'il y a un point excentré. On considère qu'il s'agit d'une anomalie. En Scilab, localiser (à l'aide de la fonction `max`) et éliminer ce point puis recommencer l'estimation des paramètres.

9) En Scilab, tracer sur une nouvelle figure, les observations et l'estimation de la droite de régression sans la mesure aberrante. Ajouter un graphique des résidus en fonction de x.

On constate que les résidus ont une forme périodique. En déduire un modèle de regression (indication : par exemple de la forme $y(x) = a_1 + a_2 x + a_3 f_3(x)$).

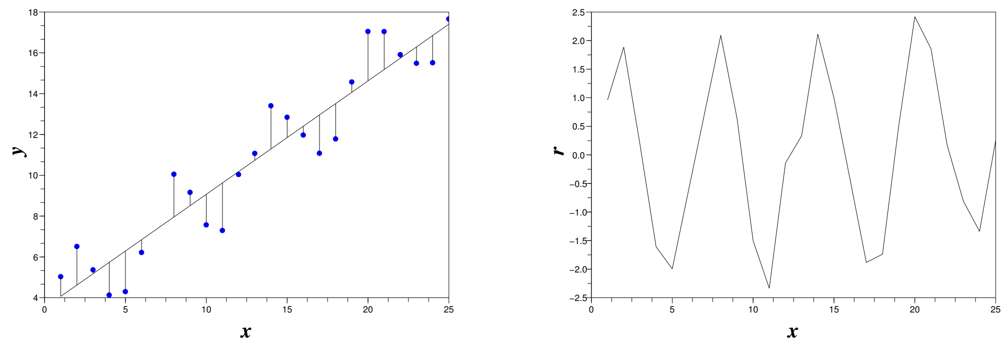


FIGURE 2 – Estimation de la droite de régression et des résidus sans la mesure aberrante.

10) Identifier les paramètres (toujours sans le point aberrant) du modèle proposé.

11) Tracer sur une nouvelle figure, les observations et l'estimation du modèle de régression proposé.