

# **GESTION D'ACTIFS**

**UNE APPROCHE QUANTITATIVE**

---

Pierre Clauss

Université Paris Dauphine  
Master BIM

## OBJECTIF DE L'ENSEIGNEMENT

---

Ce cours de 18h est composé de 6 sessions de 3h dont 3 sessions de cours magistral et 3 sessions d'atelier sur des projets en groupe.

Ce cours de Gestion d'Actifs a pour objectif de donner les premières clés pour comprendre et assimiler les outils quantitatifs d'aide à la gestion de portefeuille. Pour cela, 2 projets seront proposés pour des groupes de 3/4 étudiants appliquant pour la majorité des techniques quantitatives sur des données réelles à l'aide du logiciel Excel. Le but est donc très opérationnel et permettra aux étudiants d'horizons divers de postuler à des métiers de gérants de fonds, analystes produits, sales en Asset Management mais aussi dans les Banques de Financement et d'Investissement.

L'aspect quantitatif est essentiel aujourd'hui en finance de marché. Ce cours présentera les fondements pour gérer un portefeuille à l'aide de modèles quantitatifs mais n'aura pas la prétention de former des ingénieurs quantitatifs. Néanmoins, les connaissances développées pendant ce cours permettront d'utiliser certaines de leurs techniques pour gérer les actifs financiers plus efficacement.

# TABLE DES MATIÈRES

<b>INTRODUCTION</b>	<b>4</b>
<b>1 RISQUES FINANCIERS ET PERFORMANCE D'INVESTISSEMENT</b>	<b>5</b>
1.1 Capitalisme financier	5
1.1.1 Évolution dans les années 70	5
1.1.2 La culture du risque dans nos sociétés contemporaines	7
1.2 Mesurer les risques financiers	9
1.2.1 Évaluation d'une action	9
1.2.2 Modèles à facteurs de risque	13
1.2.3 Mesure synthétique du risque	20
1.3 Mesurer la performance d'investissement	27
1.3.1 Une première mesure synthétique	27
1.3.2 Mesures de rentabilité ajustée du risque	30
<b>2 ALLOCATION ET STRATÉGIES D'INVESTISSEMENT</b>	<b>32</b>
2.1 Allocation efficiente de Markowitz	32
2.1.1 Critères de rentabilité et de risque pour la sélection d'un portefeuille	32
2.1.2 Principe de la diversification	33
2.1.3 Construction d'un portefeuille optimal	33
2.2 Stratégies buy-and-hold et constant mix	40
2.2.1 Stratégies buy-and-hold	40
2.2.2 Stratégies constant mix	40
<b>CONCLUSION</b>	<b>43</b>

# INTRODUCTION

Ce cours de Gestion d'Actifs s'adresse à des étudiants ayant des backgrounds quantitatifs diversifiés. Pour intéresser autant les étudiants ayant des connaissances basiques en statistiques que ceux ayant une formation en mathématiques poussée, nous avons pris le parti de développer un cours faisant appel bien entendu à la théorie mais sacrifiant ses hypothèses scientifiques rigoureuses, pour gagner, nous l'espérons, en intuition pratique.

Le plan du cours reflète aussi cette exigence. Nous allons ainsi commencer par des réflexions globales sur la gestion de l'épargne financière et la finance contemporaine pour en comprendre les enjeux, pour terminer par ouvrir la boîte noire des problématiques du gérant pour créer son portefeuille. Ce cheminement ne suivra pas toujours la chronologie des découvertes de la recherche scientifique : par exemple, nous expliciterons le Capital Asset Pricing Model (CAPM) avant les découvertes de Markowitz posant les bases du CAPM.

Le cours sera composé de 2 parties.

La première tentera de faire acquérir les fondements à l'évaluation du risque et de la performance des portefeuilles gérés. A la fin de cette partie, il sera possible de gérer un portefeuille, d'actions plus spécifiquement, à l'aide d'outils simples mais très fortement utilisés en pratique. Outre cette première mise en pratique, nous initierons la première partie en développant succinctement les enjeux de la finance moderne et l'intérêt toujours grandissant pour gérer efficacement les actifs financiers.

Après avoir compris comment évaluer un portefeuille, il va falloir étudier la manière dont on le crée. Nous allons distinguer deux logiques différentes : soit on souhaite allouer de manière optimale le capital financier, soit on souhaite atteindre un objectif final de payoff. Cette partie sera une simple introduction à ces deux philosophies de gestion d'actifs, puisque sur le sujet de l'allocation nous présenterons les résultats de Markowitz et sur celui de payoff final, nous étudierons les stratégies simples buy-and-hold et constant mix. Enfin, la plupart des sections donnera lieu à un conseil pratique de gestion d'actifs.

# CHAPITRE 1

## RISQUES FINANCIERS ET PERFORMANCE D'INVESTISSEMENT

### 1.1 Capitalisme financier

Cette première section présente les évolutions du capitalisme financier depuis les années 70 à partir de trois axes principaux : l'instabilité des marchés et l'utilisation de produits dérivés ; l'apparition des investisseurs institutionnels et d'importants montants d'épargne collective à gérer ; et le développement d'une culture du risque dans toutes les sphères de notre société, et en particulier la sphère financière.

Nous entendons par capitalisme financier l'évolution du capitalisme dans nos sociétés actuelles et dont Aglietta et Reberioux [2] précisent les dérives. Depuis le milieu des années 70, nombreux s'accordent à dire que les marchés financiers ont fortement évolué avec une liquidité de plus en plus abondante et des marchés de plus en plus englobants, ainsi que l'apparition de fonds d'investissement dont le pouvoir financier n'a cessé de croître. La financiarisation actuelle de l'économie a de grandes conséquences sur la société elle-même.

Avant d'en décrire les grandes lignes, explicitons succinctement la définition classique d'un marché financier : on considère souvent les marchés financiers comme le lieu de rencontre entre capacités de financement et besoins de financement. Traditionnellement, on réduit ce lien à celui liant épargne et investissement. En effet, si les agents économiques assuraient entièrement leurs besoins de financement à l'aide de leurs ressources propres, les marchés financiers n'auraient aucune utilité.

#### 1.1.1 Évolution dans les années 70

##### Croissance de la liquidité et des transferts de risque

Les années 70 sont caractérisées par l'apparition de fortes incertitudes financières : l'inflation s'accrût, en même temps que le développement de la volatilité des taux, ainsi qu'une importante instabilité des taux de change et des produits énergétiques avec les deux chocs pétroliers, et enfin l'endettement croissant des pays en voie de développement. Ces événements se sont accompagnés d'une croissance des marchés financiers pour faciliter les transferts de risques entre entreprises ou États. Ces derniers ont eu pour conséquence une augmentation de la liquidité, via la multiplication des marchés de dérivés.

Remarquons que ce mouvement est inverse à celui d'après la crise de 1929, qui avait vu Roosevelt supprimer les marchés de dérivés. Comment expliquer cette évolution ? Il faut rappeler que les crises financières aboutissent en majorité à des crises de liquidité. Cela est appuyé par l'image d'Épinal des épargnants pris de panique allant retirer leur argent en faisant la queue devant les banques lors de crises comme celle de 1929 par exemple. Une crise financière peut avoir de multiples causes, qui sont souvent des bulles spéculatives, mais se termine toujours par un défaut de liquidité et donc la faillite de firmes, d'États ou encore

de ménages. Le fait de faciliter les transferts de liquidité via les produits dérivés permet d'éviter la contagion à toutes les entreprises d'une même place financière. Et les outils développés dans les années 70 ont permis aussi de faciliter leur échange : évaluation d'un call par Black et Scholes et amélioration des outils informatiques entre autres.

Il en est ainsi également de la crise des subprimes de l'été 2007 : suite à la faillite de ménages américains sur-endettés dont les emprunts se retrouvaient dans des portefeuilles de crédit sophistiqués dans les banques internationales, il devint difficile de trouver des acheteurs de ces produits devenus alors illiquides. Sans l'utilisation de produits assurantiels et l'intervention des banques centrales ajoutant de la liquidité sur les marchés financiers, peut-être que la crise aurait eu, en tout cas au début, des conséquences encore plus graves.

Mais cette remarque en implique une autre sur l'autre face de Janus des marchés financiers autrement moins souriante : la facilitation des transferts de risque a été favorisée par des produits dérivés et des innovations financières complexes contiguës, augmentant les appétits des spéculateurs y trouvant des sources de profit simples et rapides. Ces produits dérivés ont ainsi certes permis une croissance de la liquidité nécessaire pour éviter la faillite, mais l'opacité les accompagnant a augmenté les risques sous-jacents, en facilitant la spéculation et l'instabilité financière. La crise du début d'année 2008 est entre autres causée par un manque de confiance dans les produits de crédit complexes, innovants mais difficiles à évaluer. La bulle spéculative sur les prix des matières premières du printemps 2008 est aussi révélatrice de l'appétit des spéculateurs à faire des profits rapides. Ceci explique certainement pourquoi Roosevelt avait voulu la suppression des marchés de dérivés dans les années 1930.

### **Capitalisme actionnarial et apparition des "zinzins"**

Outre la croissance de la liquidité et des transferts de risque, les années 70 voient l'apparition d'une nouvelle forme de gouvernance des entreprises. Le capitalisme managérial va ainsi être détrôné par un capitalisme où le contrôle et la propriété (Berle et Means [4]) ne sont plus séparés, où le *principal*, l'actionnaire, va pouvoir avoir un contrôle sur l'*agent*, le manager. Ainsi, le capitalisme va devenir actionnarial et l'*outsider* qu'est l'actionnaire va avoir un impact très important sur la gouvernance d'entreprise et sur l'*insider* que représente le manager. Le capitalisme actionnarial a transformé en profondeur nos entreprises en réduisant l'asymétrie d'information existant par définition entre le propriétaire de la firme et son dirigeant.

Cette évolution de l'actionnariat est favorisée par l'apparition de nouveaux acteurs collectant une épargne de plus en plus importante : les investisseurs institutionnels ou "zinzins". Ce nouvel actionnariat va prendre de nombreux visages : fonds de pension, mutual funds (fonds communs de placement), hedge funds, assureurs ou encore les fonds souverains, dont les activités font l'actualité récente.

Les conséquences sont autant sociales qu'économiques. La presse relate en effet très régulièrement les décisions des actionnaires délocalisant les industries par exemple pour diminuer les coûts et augmenter la valeur actionnariale de l'entreprise. Nous étudierons plus bas la définition de l'action comme instrument financier et nous comprendrons la relation proportionnelle entre la valeur de l'action et les bénéfices pouvant être retirés d'une firme : plus les bénéfices anticipés seront importants, plus l'action augmentera sa valeur. Nous comprenons donc pourquoi lorsque des licenciements sont annoncés, la valeur de l'action augmente. Et ceci n'est pas dû à la malveillance des actionnaires mais à leur volonté de maximiser leur investissement dans la firme : une vague de licenciements réduira les coûts et augmentera les bénéfices futurs. Tout le débat est alors de savoir si ces coûts à court-terme n'auraient pas pu être aussi des bénéfices à long-terme... Mais aujourd'hui le bénéfice social n'est pas intégré dans la valeur actionnariale.

Mais revenons aux "zinzins". Ils ont aujourd'hui une épargne considérable à gérer. Ce besoin nécessite une professionnalisation de plus en plus importante des techniques de gestion. L'intermédiation est alors rendue nécessaire par l'asymétrie d'information qui existe entre un particulier ou un fonds de pension et le gérant professionnel. Et cette gestion doit intégrer deux objectifs paradoxaux : ne rien perdre tout en gagnant le plus possible ! Cette double exigence va demander, outre un contrôle de plus en plus accru sur la gouvernance d'une entreprise, le développement d'outils quantitatifs aidant à la gestion efficace de cette épargne satisfaisant au mieux le client, qui vit dans une société de plus en plus imprégnée par la maîtrise du risque.

### 1.1.2 La culture du risque dans nos sociétés contemporaines

En finance, les crises boursières ne viennent pas juste d'apparaître. Les deux précédents siècles en sont emplis. La considération du risque sur les marchés financiers et sa modélisation, sa mesure et sa gestion sont pourtant plus récents. Les crises des années 90 (Barings, NatWest, LTCM) pourraient expliquer le besoin qui s'est fait ressentir à ce moment-là de s'intéresser plus rigoureusement depuis 20 ans au risque avec notamment la mise en place du Comité de Bâle permettant de réguler les activités des institutions financières.

Une autre raison peut être aussi à chercher dans les progrès accomplis dans la puissance des outils informatiques ainsi que ceux faits en mathématiques à commencer par le pricing du call européen de Black-Scholes. Néanmoins, nous ne pensons pas qu'il n'y ait que cela. Il faut pour le comprendre ne pas se concentrer seulement sur la sphère financière mais étudier les évolutions de la société dans sa globalité. En effet, la mutation de nos sociétés occidentales ces 20 dernières années peuvent aussi être un élément d'explication qu'il ne faudrait pas négliger. Et cette mutation, facteur essentiel de l'évolution actuelle des marchés financiers, est l'émergence d'une société du risque.

Le mot risque a pour étymologie le latin *rescum* signifiant "ce qui coupe" et caractérisant donc une menace. Ce mot est apparu dans son sens actuel au XIV<sup>e</sup> siècle dans les assurances maritimes italiennes. Aujourd'hui, ce terme se retrouve dans presque tous les événements qui touchent nos sociétés allant des risques technologiques, écologiques, sanitaires à la circulation automobile et à l'insécurité de nos villes.

Pour appréhender ces risques, les experts chiffrent leur danger. Patrick Peretti-Watel [22] illustre cela à l'aide de l'épisode de l'explosion d'un réacteur chimique produisant des herbicides à Seveso en Italie le 10 juillet 1976. Les dangers sur les femmes enceintes n'étant pas négligeables, les habitants voulurent alors absolument savoir quel était le pourcentage de femmes pouvant avoir des séquelles. Des situations similaires dans le passé n'existant pas, il s'avérait impossible de quantifier ce danger. Or les habitants demandaient de manière insistante un chiffre, qu'a fini par leur donner un expert avec le pourcentage 30%. Malgré le peu de fondement que représentait ce chiffre, il rassura les habitants.

Ainsi, pour maîtriser un danger, le fait de le quantifier permet de le gérer même si dans certains cas le chiffre donné ne signifie rien car la situation n'est pas probabilisable. Peretti-Watel décrit l'exemple du patron de la marque de whisky Cutty Stark qui avait proposé une énorme récompense à celui qui découvrirait le monstre du Loch Ness. Bien sûr celui-ci n'existe pas. Mais certainement par paranoïa, il se couvrit de la découverte de ce monstre en souscrivant une assurance chez Lloyd's. La prime de cette assurance a dû être difficile à déterminer sachant qu'elle se fondait sur un événement impossible.

Enfin, pour gérer les risques, il faut faire des choix politiques. En effet, de nombreux seuils vont être déterminés pour savoir si une situation présente un danger ou pas. Il en est ainsi de la détection de la trisomie par amniocentèse qui demande des examens très lourds pour la femme enceinte et assez risqués : des méthodes de dépistage sanguin ont pu être développés mais avec une incertitude. Le seuil défini est donc issu d'un choix politique d'une responsabilité importante. A la fin des années 80, ce principe du seuil, sous-jacent au principe de précaution, a connu un fort succès. Et ce principe a été fortement développé dans de nombreux domaines comme la santé, l'environnement, la génétique, la sécurité au travail ou encore la finance : ainsi le comité de Bâle a défini les premiers accords de réglementations bancaires Bâle I en 1988 à l'aide d'un ratio déterminant un montant de réserve permettant aux institutions financières de se couvrir contre un risque de perte élevée. La difficulté fut alors de définir ce montant ou ce seuil de perte potentielle. Ces différentes réglementations sont donc difficiles à quantifier scientifiquement car fondées sur des probabilités extrêmes. Le ratio du comité de Bâle subit une incertitude relativement importante. Et ces réglementations ne permettent pas d'éviter toutes les crises : récemment, durant l'été 2007, la crise des subprimes n'a pas pu être évitée malgré les précautions normalement édictées. Mais comme la nécessité de la mesure, nous l'avons vu, est essentielle d'un point de vue sociétale, il faut en accepter les limites. La science a tout de même progressé et applique aujourd'hui les résultats de théories probabilistes (théorie des valeurs extrêmes, théorie des copules) pour obtenir des mesures des risques extrêmes plus précises. Malheureusement, ces techniques ne sont pas encore assez développées.

Nos sociétés contemporaines ont donc développé une importante culture du risque. Selon Giddens [11], le risque est mobilisé par tout individu comme mode de représentation du quotidien. La société est en effet davantage orientée vers le futur et moins ancrée dans le passé et les individus mettent en oeuvre une rationalité probabiliste pour évaluer les conséquences de leurs actions. Le futur devient donc un territoire à coloniser.

Beck [3], un autre sociologue travaillant sur ces problématiques, a montré les évolutions de l'individu de nos sociétés : il doit se projeter dans le futur en essayant de le contrôler et en refusant le déterminisme. La société industrielle traditionnelle était caractérisée par le lutte souvent collective contre la pauvreté et le déclin. Aujourd'hui, l'individu est livré à lui-même faisant face à une multitude de risques.

Les marchés financiers sont aussi le miroir de cette culture du risque imprégnant nos sociétés contemporaines. Les krachs boursiers font peur et peuvent affecter l'existence de tout un chacun. En outre, les agents de ces marchés "créent le futur qu'ils tentent de coloniser" selon Peretti-Watel : effectivement, entretenant eux-mêmes la volatilité des marchés financiers, ils créent les risques financiers imprévisibles qu'il leur faudra évaluer et gérer.

#### **Conseil pratique de gestion**

*Cette introduction aux enjeux de la finance contemporaine permet de mettre en évidence la nécessité de gérer efficacement l'épargne collective en insistant sur le risque pris. Le premier conseil de gestion est donc d'étudier rigoureusement le contexte économique et avoir un recul sur les différents acteurs de la finance, les outils à disposition, et l'incertitude inhérente à tout projet d'investissement.*

## 1.2 Mesurer les risques financiers

Nous allons dans cette section nous intéresser à la mesure du risque et plus précisément le risque de marché. Trois risques principaux peuvent être distingués en finance de marché : le risque de variation d'un actif financier (risque de marché), le risque de défaillance d'un émetteur de dette (risque de crédit), et le risque induit par des opérations de marché comme les erreurs de saisie, les fraudes, etc. (risque opérationnel).

Cette section sera dédiée à la mesure du risque de variation du prix d'un actif et plus précisément, pour des raisons pédagogiques, à celui de l'action. Nous définirons l'action et déterminerons l'évaluation de son prix. Notre intérêt se portera alors sur la prime de risque associée au prix de l'action. Deux voies seront alors explorées pour mesurer le risque de variation : les sensibilités de la prime de risque à des facteurs de risque et les mesures synthétiques du risque de variation du prix d'une action.

### 1.2.1 Évaluation d'une action

Une action est un titre de propriété représentant une fraction du capital d'une société. Généralement, cette valeur mobilière est cotée en Bourse et a une liquidité normalement assurée. En outre, elle confère à son acquéreur des droits sur l'entreprise, étant donné qu'il en devient propriétaire. Une action donne droit à un vote au sein de l'assemblée générale des actionnaires. Lors de cette assemblée, il est discuté de la gestion de l'entreprise pour laquelle les actionnaires sont responsables.

Nous pouvons distinguer pour un actionnaire ses droits monétaires de ses droits non monétaires. Pour les premiers, nous avons principalement :

- Le droit au dividende : le solde bénéficiaire des comptes annuels d'une entreprise, égal aux recettes auxquelles on soustrait les charges, est réparti entre les réserves de la société, servant à son autofinancement, et les dividendes, affectés aux actionnaires. Ceux-ci sont variables puisqu'ils dépendent des résultats d'une firme. Ce dividende peut soit être payé à l'actionnaire soit transformé en actions nouvelles gratuites. Le *payout ratio* correspondant au ratio entre les dividendes et les bénéfices nets est variable suivant les sociétés : celles de secteurs mûres vont distribuer des dividendes plus importants que celles de secteurs en croissance, qui veulent croître plus rapidement et allouer donc plus de capitaux à l'investissement.
- Le droit sur l'actif social : les actionnaires ont un droit proportionnel à la quantité d'actions qu'ils possèdent sur le patrimoine de l'entreprise, déduction faite des dettes<sup>1</sup>. Ainsi, lors d'une augmentation de capital, les actionnaires ont une priorité sur les actions nouvellement émises.

Pour les seconds, nous pouvons distinguer :

- Le droit à l'information : ils ont accès à tous les documents relatifs à l'activité et aux résultats de la société.
- Le droit de vote, permettant lors de l'assemblée générale annuelle de fixer les dividendes, prendre des décisions de gestion, délibérer sur les comptes de la société.
- Le droit d'exercer en justice : les actionnaires mécontents de la gouvernance de l'entreprise peuvent poursuivre les administrateurs en justice. Précisons que ces derniers, élus par les actionnaires lors de l'assemblée générale, nomment le directeur général qui a en charge la gestion de la société.

#### Évaluation comptable

Pour évaluer une action, nous avons tout d'abord la valeur comptable simple, appelée valeur boursière ou de marché :

$$\text{Action} = \frac{\text{Capitalisation Boursière}}{\text{Nombre total d'actions existantes}}$$

Cette valeur est évaluée sur le marché par les différents acteurs qui estiment la valeur de l'actif net de la firme.

1. Lors d'une faillite, les actionnaires ne sont dédommages qu'après remboursement des créanciers qui sont prioritaires.

Comment ces derniers estiment la valeur de la firme ? Le processus d'évaluation peut être modélisé à l'aide de la théorie de l'efficience des marchés que nous décrivons ici.

#### *Efficience des marchés financiers*

La théorie des marchés efficients a atteint son point d'acmé dans la recherche financière autour des années 70. C'est au même moment la prédominance de la théorie des anticipations rationnelles en Économie. Cette dernière est en partie née de l'insatisfaction croissante ressentie par de nombreux économistes à l'égard des anticipations adaptatives développées par Milton Friedman.

En 1960, John Muth avance que la prévision des agents est "parfaite", sans être forcément exacte ; elle est fondée sur des lois de probabilité effectivement suivies par les phénomènes étudiés. Si des erreurs se produisent, elles ne peuvent pas être systématiques car sinon les agents rationnels s'en apercevraient et l'intégreraient dans leurs calculs.

Les anticipations rationnelles supposent l'équilibre permanent et l'autoréalisation de la croyance des agents. Le concept d'autoréalisation signifie que l'agent représente l'économie sous la forme d'un modèle, ce dernier étant à l'origine d'actions qui *engendrent* les situations qu'il décrit. Ainsi, les croyances des agents, de type walrassiens, sont-elles considérées comme un paramètre que se donne *a priori* le modélisateur.

Robert Lucas introduit l'hypothèse des anticipations rationnelles au début des années 70. Les grands courants de pensée économique, les nouveaux classiques, les monétaristes et quelques keynésiens ont adopté cette théorie.

Cette revue rapide de la théorie économique de cette période est importante pour comprendre l'engouement de l'introduction des mathématiques (c'est en effet à ce moment aussi que Black et Scholes, en 1973 plus précisément, font l'hypothèse que les évolutions des prix des actifs suivent une marche aléatoire) et des prévisions parfaites en théorie financière, sur lesquelles se fonde la théorie de l'efficience.

En effet, l'Hypothèse d'Efficience des Marchés (HEM) financiers énonce l'idée que les prix spéculatifs des actifs (comme les actions) incorporent toujours et sans friction la meilleure information des valeurs fondamentales (prévision de bénéfices, etc.) et les évolutions des prix ne sont dues qu'à des changements dans cette information. L'information peut prendre différentes formes (série des prix passés, information publique ou privée), mais dans tous les cas, elle est entièrement et instantanément intégrée par les prix.

Dans les années 80 et 90, des doutes ont commencé à poindre sur l'hypothèse d'efficience et les modèles traditionnels d'évaluation des actifs, tels le Capital Asset Pricing Model (cf. section 1.2.2). Mais, les chantres de cette dernière avançaient et avançaient toujours que cette théorie a certes, comme toute théorie, des hypothèses restrictives mais elle permet d'appréhender au mieux l'univers des marchés financiers ; les écarts à cette théorie ne sont que des anomalies. Parmi ces anomalies, nous pouvons citer la présence sur les marchés actions d'autocorrélations positives et stables entre les rentabilités d'aujourd'hui et celles du passé proche (phénomène de momentum), ainsi que des autocorrélations négatives dans le long terme (phénomènes de retour à la moyenne des prix).

Fama [9], auteur d'un modèle plus raffiné d'évaluation des actifs dans le cadre de l'efficience (modèle de Fama-French [10], cf. section 1.2.2), énonce bien l'enjeu : "Suivant la loi traditionnelle de la Science, l'efficience des marchés peut être seulement remplacée par un meilleur modèle". Et ce dernier doit satisfaire des critères rigoureux : "il doit spécifier ce qui dans la psychologie de l'investisseur permet d'expliquer simultanément les causes de sous-réaction à certains types d'événements et de sur-réaction à d'autres. [...] Et la théorie alternative doit avoir des hypothèses rigoureusement définies, elles-mêmes potentiellement rejetables par des tests empiriques".

Des auteurs sont ainsi parvenus à l'élaboration de cadres théoriques où les anomalies de l'efficience des marchés y sont les fondements, comme les phénomènes de sous et sur-réaction à la diffusion de l'information par exemple.

### Valeur fondamentale d'une action

L'HEM stipule que le prix observé d'un titre financier, quel qu'il soit, est égal à sa valeur fondamentale, définie comme le flux des revenus futurs actualisés auquel le titre donne droit. Ainsi, en supposant que les dividendes intègrent toute l'information sur les fondamentaux économiques du cours des actions, la valeur  $V_0^i$  du titre de la société  $i$  est définie par la somme actualisée de ses flux futurs générés, les dividendes  $D_t$ , jusqu'à la fin de sa vie (considérée comme infinie) :

$$V_0^i = \sum_{t=1}^{+\infty} \frac{D_t}{(1 + r_f + \rho^i)^t}$$

avec  $r_f$  le taux sans risque et  $\rho^i$  la prime de risque nécessitée par la firme  $i$  : cette dernière est égale en fait à la rentabilité de l'action à laquelle on soustrait le taux sans risque.

Nous verrons dans la section 1.2.2 qu'elle peut être expliquée par des facteurs de risque évalués sur le marché sur lequel est traitée l'action correspondante. Si l'efficience des marchés est vérifiée, ces derniers expliqueront totalement la prime de risque de l'action et la valeur  $V_0^i$  définira le juste prix ou *fair price* de l'action.

En effet, si la prime de risque est intégralement expliquée par les facteurs de risque, le marché l'évaluera de manière juste. Dans le cas échéant, la *vraie* prime de risque sera soit plus faible soit plus élevée que celle *pricée* par le marché, ce qui signifiera que la valeur fondamentale sera soit plus élevée soit plus faible et donc l'action sera soit sous-évaluée soit sur-évaluée.

Et dans ces cas, des possibilités d'arbitrage et de créer de la performance se présenteront donc. Nous reviendrons plus précisément sur ces mécanismes d'arbitrage dans la suite du cours.

Une précision importante est à faire sur ce point. Il faut en effet souligner que la prime de risque est équivalente (au taux sans risque près) au coût issu de la détention du capital. Ce coût est *ex-ante*, et donc pas encore réalisé. Si le coût observé  $\rho^{\text{obs}}$  se révèle sur-évalué par les acteurs du marché par rapport au coût théorique  $\rho^{\text{th}}$ , alors il va diminuer pour tendre vers  $\rho^{\text{th}}$ , ce qui va faire augmenter la valeur de l'action et donc la rentabilité *ex-post*. Le coût du capital s'assimile donc (au taux sans risque près) à une prime de risque *ex-ante* et la rentabilité de l'action (au taux sans risque près) à une prime de risque *ex-post*. Malheureusement, dans la pratique, les deux primes de risque sont confondues car le coût du capital *ex-ante* est difficile à estimer (cf. modèles à facteurs de risque, section 1.2.2). On suppose donc que la rentabilité historique révèle aussi le comportement futur du coût du capital. Si aujourd'hui, la prime de risque *ex-post* est sur-évaluée, le coût du capital *ex-ante* appliqué pour l'actualisation sera sur-évalué, diminuera donc pour obtenir une rentabilité élevée, ce qui est cohérent avec la prévision préalable d'une prime de risque *ex-post* importante.

### Ratio financier d'évaluation

Pour apprécier l'écart à la valeur fondamentale, nous pouvons utiliser un ratio financier d'évaluation. Classiquement, il est utilisé soit le Dividend-Price Ratio, soit le Price-Earning Ratio PER. Ce dernier va être préféré car le Dividend-Price Ratio est très influencé par les politiques financières des entreprises (rachat d'actions par exemple augmentant les dividendes distribués). Le PER d'un actif financier se définit comme le rapport du cours de l'actif au bénéfice annuel qu'il rapporte. Il exprime donc le délai de récupération de cet actif, c'est-à-dire le nombre d'années de bénéfices sur lesquelles on valorise l'actif. Le prix d'un titre sera alors le produit du PER avec les bénéfices. C'est un indice tout d'abord d'anticipation de croissance d'une société : plus les anticipations de croissance forte sont élevées, plus le PER sera important. Et, c'est un indicateur de cherté d'une société au sein d'un même secteur : en effet, une société ayant un PER plus faible que le PER moyen du même secteur sera considérée comme peu chère. C'est donc un indicateur de valorisation : nous pouvons alors savoir si le PER d'une société est légitime ou non par rapport à un PER *juste*. Le processus des PER est souvent caractérisé par un phénomène de *retour à la moyenne*.

### Modèle de Gordon-Shapiro

Enfin, il faut remarquer qu'il est difficile de calculer un prix à partir du modèle d'actualisation des dividendes : effectivement, il se fonde sur des flux de revenus futurs aléatoires et difficiles à estimer. Les

investisseurs doivent en conséquences les anticiper sur la base des informations dont ils disposent. Le calcul de la valeur fondamentale va donc supposer des hypothèses réductrices. Le modèle le plus célèbre est celui de croissance perpétuelle défini par Gordon et Shapiro en 1956.

Ils supposent que le taux de croissance annuel des dividendes  $g$  est constant, ainsi que le coût des fonds propres, ou *cost of equity* CE de la société,  $r$ . Ce dernier est la rentabilité minimum que les actionnaires pensent pouvoir retirer de leur investissement dans l'action de la société. En outre,  $g < r$  pour éviter que la valeur de l'entreprise soit infinie. En conséquence, nous avons :

$$\begin{aligned} V_0 &= \sum_{t=1}^{+\infty} \frac{D_t}{(1+r)^t} = D_0 \sum_{t=1}^{+\infty} \left( \frac{1+g}{1+r} \right)^t \\ &= D_0 \frac{\frac{1+g}{1+r}}{1 - \frac{1+g}{1+r}} \quad \text{convergence d'une série géométrique de raison } |q| < 1 \\ &= D_0 \frac{1+g}{r-g} = \frac{D_1}{r-g} \end{aligned}$$

D'après ce modèle, l'action a une valeur fondamentale d'autant plus élevée que la part du bénéfice distribué est importante et que le coût du capital est faible, toutes choses égales par ailleurs. Ce modèle est néanmoins irréaliste : nous allons alors utiliser non plus des modèles d'évaluation à partir de l'actualisation des dividendes mais à partir du coût du capital. Ce dernier résume en effet l'incertitude concernant la distribution des dividendes : plus le coût des fonds propres est élevé, plus l'incertitude est importante et plus la valeur fondamentale est faible. Les financiers vont alors s'attacher à apprécier si le marché évalue à sa juste valeur le CE, et plus précisément la prime de risque de l'action égale au CE auquel on soustrait le taux sans risque. Le problème de l'évaluation de la valeur fondamentale d'une action va se déplacer sur celui de l'évaluation de la prime de risque.

#### Conseil pratique de gestion

*Cette introduction à l'évaluation du prix d'une action donne quelques indications quantitatives pour gérer un portefeuille actions en pratique : à l'aide par exemple du PER, il est possible d'acheter dans son portefeuille des actions sous-évaluées et de vendre des actions sur-évaluées.*

## 1.2.2 Modèles à facteurs de risque

Les modèles à facteurs vont permettre d'évaluer la prime de risque d'une action. La mesure du risque induit par la possession d'une action va alors se préciser.

### Capital Asset Pricing Model

Le Capital Asset Pricing Model (CAPM) ou Modèle d'Équilibre des Actifs Financiers (MEDAF) a été développé par Sharpe en 1964 [25], Lintner en 1965 [17] et Mossin en 1966 [21]. Les hypothèses de ce modèle sont les suivantes :

1. les investisseurs exigent une rentabilité d'autant plus forte que le risque est élevé : il existe donc une relation croissante entre rendement et risque,
2. un actif sans risque est disponible,
3. les anticipations sont identiques pour tous les investisseurs.

D'après ces hypothèses, nous pouvons exprimer l'espérance de la rentabilité  $R_i$  d'un portefeuille ou d'un actif risqué  $i$  en fonction de celle de l'actif sans risque  $r_f$  et de celle du portefeuille de marché  $R_M$ , qui est celui que tous les investisseurs possèdent :

$$\mathbb{E}(R_i) = r_f + \beta_i[\mathbb{E}(R_M) - r_f] \quad \text{avec } \beta_i = \frac{\text{cov}(R_i, R_M)}{\sigma^2(R_M)}$$

avec  $\sigma(\cdot)$  la volatilité de l'actif correspondant et  $\text{cov}(\cdot, \cdot)$  la fonction covariance. Pour des raisons pédagogiques, nous n'entrons pas dans la démonstration de ce modèle mais expliquons les conséquences empiriques et pratiques de cette modélisation de la prime de risque.

Nous pouvons aussi réécrire ce modèle de la manière suivante :

$$\rho_i = E(R_i) - r_f = \beta_i[E(R_M) - r_f] \quad (1.1)$$

pour faire apparaître la prime de risque  $\rho_i$ . Ainsi, plus les investisseurs seront exposés au portefeuille de marché, plus ils prendront de risque et plus leur rémunération consécutive potentielle sera théoriquement élevée.

Ce modèle explique donc la prime de risque d'un actif ou d'un portefeuille d'actifs  $i$  par sa sensibilité  $\beta_i$  par rapport au portefeuille de marché. Cette dernière dénote le caractère plus ou moins agressif d'un actif relativement au portefeuille de marché. Ainsi, si  $\beta_i > 1$ , l'actif est dit "offensif", et si  $\beta_i < 1$ , il est dit "défensif" relativement au marché considéré ( $\beta_i = 1$  correspond à une prise de risque similaire à celle prise par le portefeuille de marché). L'indicateur  $\beta$  est très utilisé par les praticiens car simple d'utilisation.

Cependant, outre les hypothèses restrictives du modèle d'équilibre, il possède aussi quelques limites de mise en oeuvre empiriques.

Tout d'abord, il est difficile de déterminer précisément le portefeuille de marché. Souvent, il est réduit à l'indice phare de la place financière dans laquelle est évalué l'actif ou le portefeuille. Seulement, ces indices n'intègrent pas tous les actifs risqués de l'univers d'investissement, comme le voudrait la théorie, puisqu'il se restreint aux actions.

Les poids alloués aux actions dans ces indices varient suivant les places financières. Ils peuvent être relatifs :

- à la valeur des titres : c'est le cas du plus vieil indice fondé en 1884, le Dow Jones Industrial Average composé de 30 entreprises américaines importantes,
- aux capitalisations boursières,
- et au flottant, défini comme la part de la capitalisation que l'on peut échanger sur les marchés (inférieur le plus souvent à la capitalisation boursière totale), traduisant donc la liquidité du titre. La pondération par le flottant est le cas de la plupart des indices aujourd'hui. Ainsi, le CAC 40 l'est depuis le 1er décembre 2003, après avoir été pondéré par les capitalisations.

Les créances bancaires, l'immobilier, le capital humain manquent donc dans la composition de ces indices et sont difficiles à mesurer précisément.

En outre, la seconde limite concerne l'estimation des  $\beta$ . Le modèle de régression sous-jacent au CAPM s'écrit :

$$\rho_i = R_i - r_f = \alpha_i + \beta_i[R_M - r_f] + \varepsilon_i$$

Le premier problème qui apparaît est l'instabilité des  $\beta_i$  suivant les périodes d'estimation. En effet, ils peuvent évoluer très fortement. Quelles méthodes d'estimation utiliser alors pour éviter l'instabilité des  $\beta$ ? Quelle période considérer? L'une des solutions la plus intéressante est l'utilisation du filtre de Kalman (dont l'étude dépasse le cadre de ce cours) permettant de calibrer des  $\beta$  très réactifs : cette technique permet de s'exonérer de l'inertie propre au Moindres Carrés Ordinaires (MCO).

Rappelons quelques principes essentiels pour mettre en pratique la technique des MCO. Nous n'allons pas énoncer les fondements mathématiques du modèle de régression linéaire mais plutôt expliciter comment mettre en oeuvre cette technique sur des échantillons de données. Deux points pratiques sont essentiels pour éviter tout problème d'analyse :

1. Au préalable, il est primordial d'éviter toute régression fallacieuse (*spurious regression*), c'est-à-dire un modèle essayant de régresser une variable intégrée d'ordre 1 (non-stationnaire) sur d'autres variables non-stationnaires. Ce problème a été mis en évidence par Granger et Newbold [12]. Une régression fallacieuse va conclure à des relations erronées entre variables, car statistiquement invalides. Il est donc primordial de travailler avec des données stationnaires (les rentabilités le sont par exemple).
2. En outre, un problème peut apparaître lorsque l'estimateur  $\hat{\beta}$  se révèle instable suivant des sous-échantillons de l'échantillon total des données de taille  $n$ . En effet, il n'est pas rare que les sensibilités  $\hat{\beta}$  évoluent dans le temps par exemple. Quelles méthodes d'estimation utiliser alors pour capter la variabilité des  $\hat{\beta}$ ? La question essentielle qui se pose est en fait celle de la partie de l'échantillon total des données à considérer pour déterminer les paramètres de la régression. Deux possibilités s'offrent à nous :

- Soit on fixe le point de départ de la construction du sous-échantillon  $(y_1, \dots, y_{n_r})$  et on *empile* les données au fur et à mesure qu'elles apparaissent : le deuxième sous-échantillon devient alors  $(y_1, \dots, y_{n_r+1})$  et ainsi de suite. On réalise des régressions récursives.
- Soit on fixe une taille d'échantillon  $n_g$  inférieure à  $n$  et on construit plusieurs sous-échantillons de taille  $n_g$  au sein de l'échantillon total. On fait ainsi *glisser* nos échantillons, de taille fixe  $n_g$ , au fur et à mesure du temps :  $(y_1, \dots, y_{n_g})$  pour le premier sous-échantillon,  $(y_2, \dots, y_{n_g+1})$  pour le deuxième, et ainsi de suite. On réalise alors des régressions glissantes.

Pour capter la réactivité des  $\hat{\beta}$ , nous privilégierons la régression glissante. Le choix de la taille  $n_g$  (comme pour celui de  $n_r$ ) des sous-échantillons glissants n'a pas de règle figée. En fait, il dépend d'un arbitrage entre réactivité des estimateurs et bonnes propriétés statistiques. L'objectif étant de capter le plus précisément possible le moment où le régime des  $\hat{\beta}$  a changé, plus l'échantillon sera de petite taille, moins il sera pollué par les valeurs du passé mais plus il aura des propriétés statistiques mauvaises.

Le second problème est la significativité possible de  $\alpha_i$ . Théoriquement, le CAPM implique l'Absence d'Opportunité d'Arbitrage (AOA) entre les actifs, c'est-à-dire qu'en théorie la relation (1.1) est toujours vérifiée. Si cela n'est pas le cas, l'actif est mal évalué et selon l'HEM, l'anomalie sera résorbée rapidement par les arbitrageurs et ne devrait pas perdurer. Néanmoins, dans la réalité, des  $\alpha_i$  significativement non nul perdurent plus longtemps que prévu par l'HEM. Cela peut alors signifier deux choses :

- Soit le modèle n'est pas à remettre en cause et alors la prime de risque observée, assimilée au coût du capital moins le taux sans risque,  $\rho_i^{\text{obs}}$  est arbitrageable mais les arbitrageurs de la théorie ne sont pas aussi efficaces que prévu. Alors une rentabilité *gratuite* apparaît dans le cas où  $\alpha_i$  est par exemple positif :

$\rho_i^{\text{obs}} = \alpha_i + \rho_i^{\text{th}} \Leftrightarrow \rho_i^{\text{th}} = \rho_i^{\text{obs}} - \alpha_i$ . Le modèle est supposé bon, donc la prime de risque *ex-ante*  $\rho_i^{\text{obs}}$  devrait diminuer pour atteindre la prime de risque théorique  $\rho_i^{\text{th}}$  et donc le prix de l'action augmenter. L'action est bien sous-évaluée. Le marché est alors inefficace pour l'actif  $i$  considéré. La rentabilité sera élevée puisque une partie *gratuite*  $\alpha_i$  est présente.

- Soit la prime de risque n'est pas entièrement décrite par sa seule sensibilité au portefeuille de marché. D'autres facteurs de risque sont certainement évalués par les intervenants des marchés. Fama et French ont ainsi proposé un modèle d'équilibre plus réaliste complétant le CAPM des autres facteurs de risque pouvant être rémunérés par la prime de risque.

#### Conseil pratique de gestion

*Le CAPM introduit la gestion stylisée : en effet, un gérant peut segmenter sa gestion suivant la sensibilité des actions au portefeuille de marché. Il pourra ainsi créer un portefeuille d'actions défensives, c'est-à-dire à  $\beta$  inférieurs à 1, et un portefeuille d'actions offensives, à  $\beta$  supérieurs à 1.*

*En outre, le fait de déterminer des anomalies au CAPM, via des  $\alpha$  non nuls, peut lui permettre de faire un stock picking plus efficace en sélectionnant des valeurs dont la prime de risque est sous-évaluée par le CAPM et donc par le marché (en supposant que les comportements de ce dernier sont bien décrits par le CAPM).*

### Modèle de Fama-French

Le modèle de Fama et French [10] développé en 1993 correspond à un raffinement du Capital Asset Pricing Model. Il explique la rentabilité espérée d'un portefeuille ou d'une action  $\mathbb{E}(r_i)$  en excès du taux d'intérêt sans risque  $r_f$  par la sensibilité de sa rentabilité à l'espérance de trois facteurs de risque non diversifiables :

1. la rentabilité en excès d'un portefeuille de marché  $R_M - r_f$  (correspondant au facteur de risque du CAPM),
2. la différence entre la rentabilité d'un portefeuille d'actions de petite taille, la taille étant évaluée par la capitalisation boursière, et la rentabilité d'un portefeuille d'actions de grande taille (SMB, *Small Minus Big*),
3. la différence entre la rentabilité d'un portefeuille d'actions à faible valorisation, la valorisation étant évaluée par le ratio financier *book-to-market*<sup>2</sup>, ces actions sont alors caractérisées de *Value*, et la rentabilité d'un portefeuille d'actions à importante valorisation financière, ces actions sont alors caractérisées de *Growth* (HML, *High Minus Low*).

Formellement, nous avons l'expression de la prime de risque suivante :

$$\rho_i = \mathbb{E}(R_i) - r_f = \beta_i(\mathbb{E}(R_M) - r_f) + s_i\text{SMB} + h_i\text{HML}$$

Le modèle de régression correspondant s'écrit :

$$\rho_i = R_i - r_f = \alpha_i + \beta_i(R_M - r_f) + s_i\text{SMB} + h_i\text{HML} + \varepsilon_i$$

Les facteurs sont déterminés empiriquement de manière à éviter l'overlapping. Dans ce but, il va falloir construire six portefeuilles :

	< Médiane Capitalisation	≥ Médiane Capitalisation
≥ décile 70% book-to-market	Small Value	Big Value
	Small Neutral	Big Neutral
< décile 30% book-to-market	Small Growth	Big Growth

TABLE 1.1 – Six portefeuilles Fama-French

Ainsi, nous pouvons calculer les rentabilités des portefeuilles SMB et HML à partir de celles de ces six portefeuilles :

$$\begin{aligned} \text{SMB} = & \frac{1}{3}(\text{Small Value} + \text{Small Neutral} + \text{Small Growth}) \\ & - \frac{1}{3}(\text{Big Value} + \text{Big Neutral} + \text{Big Growth}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{HML} = & \frac{1}{2}(\text{Small Value} + \text{Big Value}) \\ & - \frac{1}{2}(\text{Small Growth} + \text{Big Growth}) \end{aligned}$$

Ce modèle parvient empiriquement à expliquer, souvent entièrement, la prime de risque d'un portefeuille. Il améliore donc le CAPM. Néanmoins, dans certaines situations, il est possible de créer des portefeuilles dont les primes de risque échappent à l'explication du modèle de Fama-French : il reste alors encore un  $\alpha_i$  significatif. De la même manière que pour le CAPM, cette anomalie peut signifier une inefficience d'évaluation de l'actif ou une remise en cause du modèle. Dans ce dernier cas, Carhart [6] a ainsi développé un

2. Les actions à faible valorisation financière sont alors celles ayant un fort *book-to-market*.

modèle d'évaluation incorporant le momentum de prix d'un actif.

Pour terminer cette section sur les modèles à facteurs, nous allons étudier dans la suite un modèle d'évaluation s'exonérant de l'hypothèse d'AOA du CAPM : le Modèle d'Évaluation par Arbitrage ou Asset Pricing Theory (APT).

#### **Conseil pratique de gestion**

*Le modèle de Fama-French enrichit la gestion stylisée en ajoutant deux segmentations supplémentaires des actions, en plus du  $\beta$ , très utilisées en pratique : la gestion par capitalisation et celle suivant la valorisation des actions.*

*Des portefeuilles d'actions vont ainsi être formés suivant la capitalisation en distinguant les petites capitalisations (Small Cap) et les grandes capitalisations (Large Cap).*

*La valorisation va aussi distinguer les actions matures ou de rendement (Value) faisant partie de secteurs dont la croissance future est relativement faible mais les dividendes distribués élevés, et les actions de croissance (Growth), de secteurs dont l'espérance de rendement futur est important.*

### Asset Pricing Theory

Ross [24] en 1976 proposa un modèle d'évaluation des actifs s'affranchissant des hypothèses de normalité et de mesure du portefeuille de marché des modèles précédents. Ce modèle contrairement au CAPM s'appuie sur mais n'implique pas l'Absence d'Opportunité d'Arbitrage (AOA). C'est donc une autre approche de l'évaluation des actifs, complémentaire.

Le modèle lie formellement l'espérance de la rentabilité d'un titre ou d'un portefeuille  $i$   $R_i$  à  $m$  facteurs de risque systématiques de prime de risque pour chaque facteur  $j$   $\mathbb{E}(R_j) - r_f$  :

$$\mathbb{E}(R_i) = r_f + \sum_{j=1}^m \beta_{ij} (\mathbb{E}(R_j) - r_f)$$

Les facteurs sont non corrélés entre eux et le modèle statistique fait apparaître le risque idiosyncratique  $\varepsilon_i$  :

$$\rho_i = R_i - r_f = \sum_{j=1}^m \beta_{ij} (R_j - r_f) + \varepsilon_i$$

Le problème est alors de définir les facteurs communs. Deux façons peuvent être évoquées : celle exogène, explicitant des facteurs macro-économiques ou financiers a priori, et celle endogène extrayant des facteurs inobservables ou latents.

La première est celle par exemple d'organismes financiers comme BARRA. Le souci est alors l'hypothèse de non-corrélation entre les facteurs : pour résoudre cela, des méthodes statistiques, comme l'Analyse en Composantes Principales (ACP) sur les facteurs exogènes, peuvent être alors mises en oeuvre.

La seconde utilise directement les méthodes statistiques comme l'ACP sur l'univers des titres pour en extraire les facteurs communs. A la différence des autres modèles étudiés précédemment, les facteurs de risque sont alors implicites ou latents.

#### *L'Analyse en Composantes Principales en théorie*

Nous allons présenter ici de manière formelle l'ACP. Rappelons tout d'abord les développements originels de cette méthode pour comprendre ainsi l'intérêt de l'utilisation de cet outil pour évaluer les actifs financiers. Cet outil statistique s'est développé grâce à la psychométrie. En effet, dans ce domaine, les variables explicatives (contrairement à l'économétrie) sont rares ; mettre des chiffres derrière le comportement d'un individu subjectif n'est pas chose aisée. Pour résoudre ce problème et tout de même construire des modèles mathématiques, on suppose que le comportement d'un individu est régi par des facteurs quantitatifs latents mais difficilement observables. C'est précisément l'objectif de l'APT : il est difficile de quantifier les comportements financiers évaluant les actifs et l'alternative est donc d'utiliser des facteurs statistiques. L'objectif essentiel de l'Analyse en Composantes Principales (ACP) est d'expliquer les corrélations entre un nombre élevé de variables quantitatives par un nombre plus restreint de facteurs latents ou composantes principales, qui représentent des variables inobservables (cf. [15] et [18]). L'ACP consiste donc à transformer les  $p$  variables d'origine  $x_1, \dots, x_p$  en  $p$  nouvelles variables  $f_1, \dots, f_p$  (les composantes principales) de variance maximale, non corrélées deux à deux et qui s'expriment comme combinaison linéaire des variables d'origine.

Soit  $x$  le vecteur composé des  $p$  variables d'étude de la population considérée. Nous travaillons sur les données  $x$  que nous centrons et qui ont pour matrice de variance-covariance  $\Sigma$ .

La méthode de l'ACP consiste à diagonaliser  $\Sigma$ . Nous obtenons alors  $\Sigma = \Phi \Lambda \Phi'$  avec  $\Phi$  la matrice carrée composée des  $p$  vecteurs propres  $\phi_j$  (en colonne) et  $\Lambda$  la matrice diagonale des  $p$  valeurs propres  $\lambda_j$ .

L'objectif est de classer les  $p$  différentes valeurs propres suivant leur ordre de grandeur : le vecteur propre  $\phi_1$  associé à la plus grande valeur propre  $\lambda_1$  permet alors de construire la première composante principale captant la plus importante variabilité.

Les composantes principales (CP) sont données par :

$$f = \Phi' x$$

où  $f$  est le vecteur des  $p$  facteurs latents ou composantes principales  $f_i$ . La variance de la CP  $i$  est égale à la valeur propre  $i$ .

Nous obtenons au final le modèle factoriel suivant :

$$x = \Phi f$$

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \phi_{11} & \dots & \phi_{1p} \\ \vdots & & \vdots \\ \phi_{p1} & \dots & \phi_{pp} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_p \end{bmatrix}$$

Pour chaque variable, nous avons :

$$x_i = \sum_{j=1}^p \phi_{ij} f_j \quad i = 1, \dots, p$$

Les  $\phi_{ij}$  représentent aussi ce que nous appellerons les *factor loadings*. Représenter ces derniers en fonction des variables d'origine ou représenter les composantes principales revient aux mêmes types d'interprétation. Par souci de parcimonie, nous n'allons conserver que les  $k$  premiers facteurs avec  $k < p$  et nous supposons que pour chaque variable, nous avons :

$$x_i = \sum_{j=1}^k \phi_{ij} f_j + \varepsilon_i \quad i = 1, \dots, p \quad (1.2)$$

avec  $\varepsilon_i = \sum_{j=k+1}^p \phi_{ij} f_j$  les résidus négligeables.

Ceci nous permet de réduire l'ensemble des données à un ensemble plus restreint de facteurs représentant au mieux leur variabilité.

#### *Limites de l'APT*

La seule contrainte dans l'APT est donc la linéarité entre la rentabilité d'un actif et les facteurs de risques systématiques non corrélés entre eux. Néanmoins, plusieurs problèmes apparaissent dans la mise en place de cette méthode d'évaluation.

D'une part, cette méthode n'implique pas l'AOA et donc est plus limitée que le CAPM pour fournir un cadre d'analyse à la présence ou non d'arbitrages.

En outre, les facteurs communs sont souvent très difficiles à interpréter car inobservables. Régulièrement, l'ACP va extraire plusieurs facteurs latents dont l'interprétation est seulement aisée pour le premier facteur, alors assimilable au portefeuille de marché dans le CAPM : la variabilité des titres de l'univers est en premier lieu relative à un facteur commun à tous les titres représentant la *moyenne* du marché. En effet, dans l'ACP, le premier facteur est souvent un facteur de niveau déterminant une moyenne pondérée de tous les actifs. L'objectif de l'APT de s'exonérer du portefeuille de marché ne semble donc pas atteint.

Dans la pratique, l'APT peut être utilisée dans la détermination de facteurs communs parcimonieux mais ne supplante pas le CAPM, malgré ses hypothèses irréalistes, car ce dernier propose, contrairement à l'APT, un cadre d'analyse de l'équilibre rigoureux.

#### **Conseil pratique de gestion**

*L'APT est d'un intérêt pratique moins évident que les autres modèles à facteurs. Les facteurs inobservables ne permettront pas de styliser la gestion mais seront utiles pour essayer de diversifier le portefeuille et ne pas investir toute sa richesse sur un seul facteur de risque.*

*Ce souci de diversification sera précisé dans la partie sur l'allocation et nous verrons que l'APT pourra être utile dans la détermination de matrices de variance-covariance des actifs ayant de bonnes propriétés mathématiques.*

### 1.2.3 Mesure synthétique du risque

Les modèles à facteurs de risque que nous venons d'étudier ont un intérêt essentiel pour décrire les sensibilités d'un actif financier ou d'un portefeuille à un (CAPM) ou trois facteurs de risque (Fama-French). L'inconvénient est la difficulté de ces modèles à apprécier le risque global d'un portefeuille composé d'actifs hétérogènes, n'ayant par exemple pas le même portefeuille de marché : dans ce cas, il est très difficile d'agréger les différentes sensibilités. Il est alors préférable de déterminer une mesure synthétisant le risque global du portefeuille. Cette mesure synthétique sera alors issue de la distribution des rentabilités<sup>3</sup> du portefeuille. L'une de ces mesures, très usitée par les praticiens, est la volatilité.

#### La volatilité

Soit  $R$  le vecteur des rentabilités de l'actif ou du portefeuille considéré. La volatilité notée  $\sigma$  correspond à l'écart-type de ces rentabilités :

$$\sigma = \sqrt{\mathbb{E}[(R - \mathbb{E}(R))^2]}$$

Avant d'évaluer ce critère, il faut préciser une spécificité de calcul. Nous observerons dans la suite les évolutions des rentabilités d'indices boursiers de périodicité hebdomadaire<sup>4</sup>. Il nous faut pouvoir les comparer à des volatilités calculées sur des périodicités différentes, puisque la volatilité augmente avec l'intervalle de temps noté  $\Delta$  défini entre les rentabilités.

Ces dernières sont calculées de la manière suivante. Soit  $V_t^P$  la valeur en  $t$  du portefeuille et  $V_{t+\Delta}^P$  la valeur en  $t + \Delta$ , alors la rentabilité du portefeuille  $R_{t|t+\Delta}^P$  calculée sur l'intervalle de temps  $\Delta$  est égale à :

$$R_{t|t+\Delta}^P = \frac{V_{t+\Delta}^P}{V_t^P} - 1.$$

Ainsi, intuitivement, nous pouvons vérifier, comme annoncé plus haut, que plus l'intervalle de temps va augmenter, plus les rentabilités auront une valeur absolue importante et donc la volatilité va croître.

Sous l'hypothèse de normalité et d'indépendance des rentabilités, nous pouvons calculer une volatilité annuelle à partir de n'importe quelle périodicité : il suffit de multiplier la volatilité par un facteur égal à la racine carrée de l'inverse de l'intervalle de temps  $\Delta$  considéré.

Ce dernier vaut suivant les périodicités :

Périodicité	$\Delta$	Facteur
Quotidienne	$\frac{1}{261}$	$\sqrt{261}$
Hebdomadaire	$\frac{1}{52}$	$\sqrt{52}$
Mensuelle	$\frac{1}{12}$	$\sqrt{12}$

TABLE 1.2 – Facteur multiplicatif suivant la périodicité

Le facteur appliqué à la périodicité quotidienne est différent suivant la zone géographique considérée : en effet, le nombre de jours fériés, et donc non tradés, diffère suivant le pays.

3. Nous expliquerons l'intérêt d'utiliser les rentabilités dans la section 1.3.1.

4. Cette périodicité est la plus intéressante car les données quotidiennes possèdent trop de bruit et celles mensuelles ne sont pas assez représentatives de la dispersion réelle des rentabilités car elles sont alors démesurément lissées.

Un simple exemple va nous permettre d'appréhender l'intérêt de cette mesure. Observons sur un même graphique les évolutions entre le 8 janvier 1999 et le 8 juin 2007 de l'indice européen MSCI Europe et du taux d'intérêt Euribor 3 mois, ainsi que de leurs rentabilités hebdomadaires.

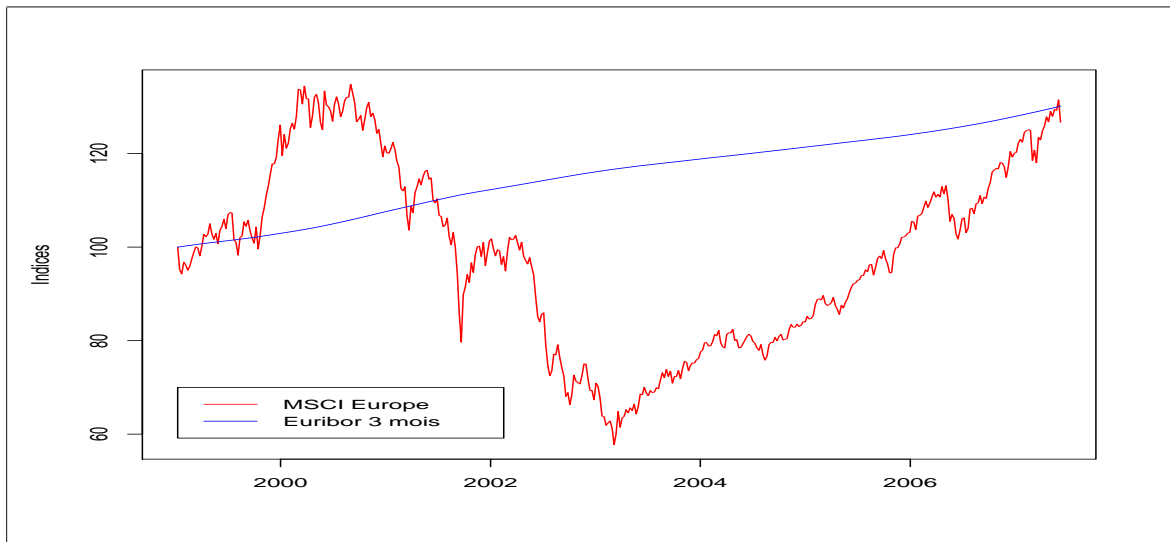


FIGURE 1.1 – Évolutions des indices du MSCI Europe et de l'Euribor 3 mois

Nous remarquons sur les Figures 1.1 et 1.2 que la variation des indices et la dispersion des rentabilités sont plus importantes pour le MSCI Europe que pour l'Euribor 3 mois. Ceci va donc se répercuter automatiquement sur l'indicateur statistique de dispersion que représente la volatilité.

En effet, la volatilité annualisée du MSCI Europe sur la période observée est de 16.99% et celle de l'Euribor 3 mois de 0.12%. Il ne fait alors aucun doute que le MSCI Europe est plus risqué que l'Euribor 3 mois. Cette conclusion aurait pu être tirée de la connaissance de ces deux indices : en effet, le MSCI Europe est composé d'actions alors que l'Euribor 3 mois est un taux d'intérêt ayant un risque quasi-nul de perte. Etant donné qu'un portefeuille d'actions peut subir des pertes potentielles importantes contrairement à l'Euribor 3 mois, il était évident que l'on aboutisse à la conclusion précédente. Mais la volatilité a permis de quantifier la différence de risque de perte des deux indices. A l'aide de cet indicateur synthétique, nous pouvons donc hiérarchiser les deux indices et déterminer leur niveau de risque de pertes potentielles. Ceci aurait été difficile à réaliser avec le CAPM par exemple et sa sensibilité  $\beta$  : quel portefeuille de marché commun à ces deux indices ? Et quand bien même ce portefeuille de marché aurait été défini, aurait-on été certain des présupposés théoriques du CAPM ? En effet, d'autres facteurs de risque omis n'auraient-ils pas été évalués dans la prime de risque ? La volatilité calibrée sur les données historiques évite ces problèmes de modèle.

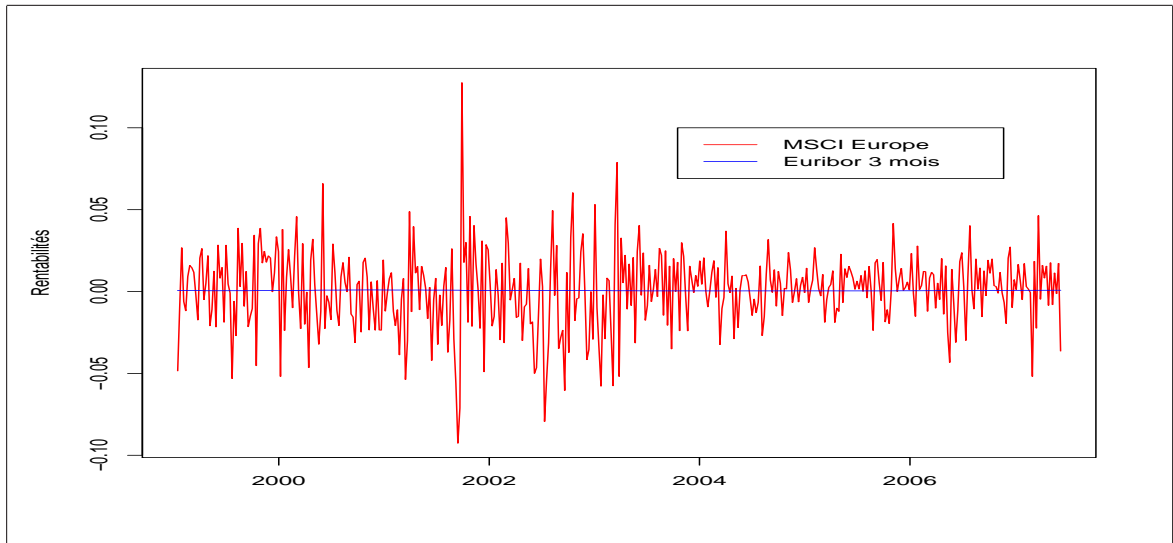


FIGURE 1.2 – Évolutions des rentabilités du MSCI Europe et de l'Euribor 3 mois

Néanmoins, elle n'est pas exempte de tout inconvénient. Effectivement, lorsque les données viennent à manquer, il va devenir difficile de calculer une volatilité robuste. Il va falloir alors modéliser les rentabilités des actifs considérés à l'aide d'une loi de probabilité (la loi Normale par exemple) ou d'un modèle statistique (ARMA-GARCH par exemple). Si nous souhaitons créer un produit financier n'ayant pas encore d'existence et dont nous voulons évaluer le risque, il va falloir le modéliser pour en déterminer la volatilité. Le risque de ne pas utiliser un modèle adéquat entre alors en jeu.

Enfin, un dernier défaut est révélé par la Figure 1.3.

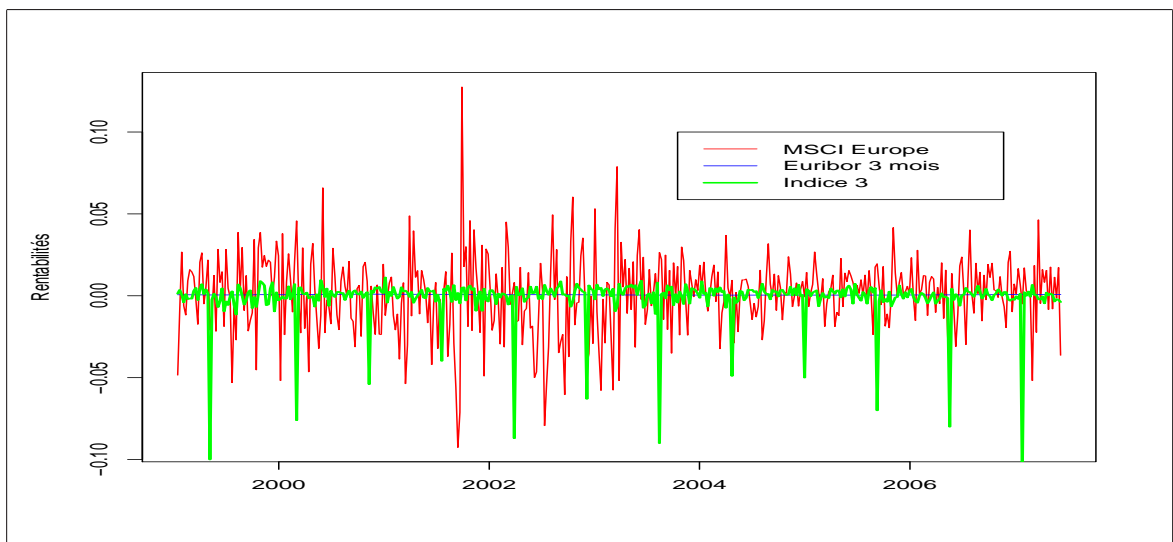


FIGURE 1.3 – Évolutions des rentabilités du MSCI Europe, de l'Euribor 3 mois et de l'indice 3

Nous pouvons observer à nouveau les évolutions des rentabilités du MSCI Europe et de l'Euribor 3 mois mais aussi d'un actif dont la dispersion est plus originale. Les volatilités nous feraient conclure à un risque plus élevé de pertes pour le MSCI Europe car la volatilité annualisée de l'Indice 3 est plus faible et vaut 9,38%. Or il est évident à partir de la Figure 1.3 qu'investir dans l'Indice 3 est plus dangereux car des

pertes très fortes peuvent apparaître avec une probabilité significative.

Nous observons aussi ces caractéristiques à partir du graphe des distributions empiriques des deux indices financiers MSCI Europe et Indice 3 de la Figure 1.4. Nous avons déterminé, au lieu des histogrammes, les densités estimées non-paramétriquement par un noyau gaussien. Ainsi, la queue des pertes est plus épaisse pour l'indice 3 ce qui est un inconvénient lorsque l'on détermine le risque par la seule volatilité qui est un indicateur du risque moyen et ne capte donc pas cela.

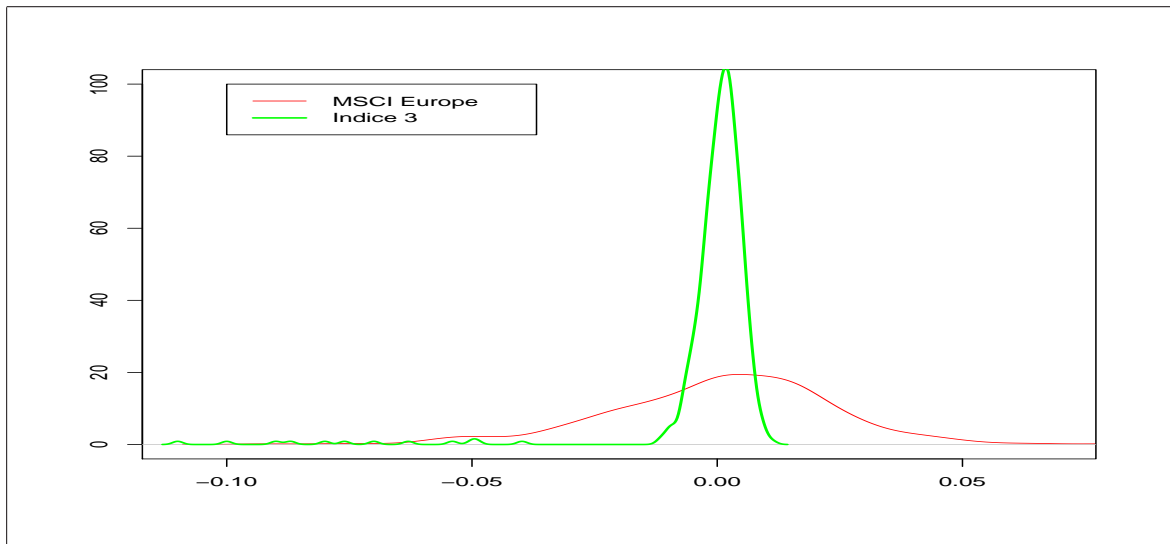


FIGURE 1.4 – Densités des rentabilités du MSCI Europe et de l'indice 3

Cet inconvénient va nous permettre de créer une autre mesure synthétique du risque pouvant hiérarchiser les 3 indices plus correctement, c'est-à-dire reconnaissant dans l'indice 3 l'actif financier le plus risqué en termes de pertes potentielles. Cette mesure est le quantile de perte maximale que peut subir l'actif ou le portefeuille avec une probabilité d'occurrence faible mais non négligeable pour l'investisseur : on la dénomme la Value-at-Risk ou VaR. Ainsi, pour nos trois indices, nous avons les VaR suivantes définies avec une probabilité à 1% en comparaison des volatilités annualisées :

Indice	Volatilité annualisée	VaR 1%
Euribor 3 mois	0.12%	0.04%
MSCI Europe	16.99%	-5.77%
Indice 3	9.38%	-7.85%

TABLE 1.3 – Volatilités et VaR des trois indices

Cela prouve bien que la VaR détermine une hiérarchie correcte du risque de pertes d'un actif financier, contrairement à la volatilité.

### La Value-at-Risk

La VaR représente une perte potentielle dont il faut définir la **probabilité**  $\alpha$  d'occurrence, appelée aussi niveau de confiance, ainsi que l'**horizon**  $h$  de durée d'investissement. Par exemple, une probabilité de 1% pour un horizon  $h$  de un jour revient à accepter que la perte potentielle ne dépasse la VaR que 2 à 3 fois par an (1 an = 251 jours ouvrés). L'horizon représente la durée sur laquelle nous estimons le risque, c'est-à-dire le temps nécessaire pour couvrir la position du portefeuille : 1 jour en trading, 1 mois en gestion.

Soit  $V_t^P$  la valeur en  $t$  du portefeuille et  $V_{t+h}^P$  la valeur à l'horizon  $h$ . La rentabilité du portefeuille  $R_{t|t+h}^P$  investi à la date  $t$  et détenu sur un horizon de durée  $h$  a pour expression  $\forall t \geq 1$  :

$$R_{t|t+h}^P = \frac{V_{t+h}^P}{V_t^P} - 1.$$

Supposons que  $R_{t|t+h}^P$  est issu d'une variable aléatoire notée  $R^P$ . La VaR( $h, \alpha$ ) est alors définie par :

$$\mathbb{P}[R^P \leq \text{VaR}(h, \alpha)] = \alpha$$

c'est-à-dire la probabilité que la rentabilité du portefeuille soit inférieure à la VaR sur un horizon  $h$  est égale à  $\alpha$ <sup>5</sup>.

Notons  $F$  la fonction de répartition de la variable aléatoire  $R^P$  des rentabilités du portefeuille de périodicité  $h$ . La Value-at-Risk de probabilité d'occurrence  $\alpha$  et d'horizon d'investissement  $h$  est alors le quantile défini par :

$$\text{VaR}(h, \alpha) = F^{-1}(\alpha) \tag{1.3}$$

Il nous reste alors à caractériser la forme de  $F$ . De nombreuses formulations sont possibles. Nous nous intéresserons seulement aux plus classiques malgré leurs limites.

La première solution consiste à estimer  $F$  par sa distribution empirique : nous obtenons la VaR historique. Nous estimons alors  $F$  non-paramétriquement par sa distribution empirique  $\hat{F}$ . Supposons que nous disposons d'un historique de  $T$  observations des rentabilités. La distribution empirique  $\hat{F}$  des rentabilités du portefeuille est alors caractérisée à partir du vecteur  $(\hat{R}_{1|1+h}^P, \dots, \hat{R}_{T|T+h}^P)'$  et  $\hat{F}^{-1}(\alpha)$  correspond au quantile de probabilité  $\alpha$  de  $(\hat{R}_{1|1+h}^P, \dots, \hat{R}_{T|T+h}^P)'$ .

L'avantage de cette méthode est donc de ne pas imposer d'hypothèse sur la loi de distribution des rentabilités. Mais le problème qui se pose est la longueur  $T$  de l'historique qui, si elle est trop faible, ne fournit pas un calcul précis de la VaR. Nous pouvons alors utiliser la technique du ré-échantillonnage ou *bootstrap* (cf. Efron [8]).

Nous construisons pour cela une version aléatoire de même taille du vecteur  $(\hat{R}_{1|1+h}^P, \dots, \hat{R}_{T|T+h}^P)'$  dans laquelle les rentabilités du portefeuille peuvent apparaître pour certaines aucune fois, pour d'autres une fois, pour d'autres encore deux fois, etc. Ce nouveau vecteur est une version ré-échantillonnée ou *bootstrap* du vecteur d'origine. Nous pouvons alors déterminer la VaR historique de cet échantillon. Nous réalisons  $B$  répliques *bootstrap* et la VaR historique *bootstrap* correspond à la moyenne des  $B$  VaR historiques.

L'inconvénient d'une VaR historique est aussi l'*over-fitting* ou encore la dépendance trop forte à l'échantillon sur lequel elle a été déterminée, et donc la difficulté de cette VaR à être robuste dans le temps.

Pour résoudre cela, nous allons proposer une deuxième solution ajustant sur les rentabilités un modèle statistique : on parle alors de VaR paramétrique. De manière classique, le choix du modèle paramétrique se porte sur la loi Normale. Supposons donc que les rentabilités du portefeuille  $R_{t|t+h}^P$  sont issues d'une variable aléatoire gaussienne : ainsi,  $F$  est définie par  $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$  avec  $\mu$  l'espérance des rentabilités et  $\sigma^2$  la variance des rentabilités.

5. Les praticiens peuvent aussi définir le niveau de confiance par  $1 - \alpha$  qui correspond de même au quantile de probabilité  $\alpha$  : ainsi, une VaR à 99% par exemple correspond au quantile de probabilité  $\alpha = 1 - 99\% = 1\%$ .

Nous obtenons ainsi à partir de l'équation (1.3) :

$$\Phi\left(\frac{\text{VaR}(h, \alpha) - \mu}{\sigma}\right) = \alpha$$

avec  $\Phi$  la fonction de répartition de la loi Normale centrée réduite. Nous avons donc :

$$\text{VaR}(h, \alpha) = \mu + \sigma\Phi^{-1}(\alpha)$$

Nous n'allons pas développer d'autres modélisations dans ce cours mais il nous paraît intéressant d'introduire les limites de la modélisation gaussienne. En effet, cette méthode repose sur des hypothèses irréalistes pour modéliser les rentabilités des actifs financiers puisque trois faits stylisés caractérisent leur distribution et ne sont pas captés par la modélisation gaussienne :

1. l'asymétrie : l'occurrence de pertes extrêmes est plus forte que celle de profits extrêmes,
2. les queues épaisses,
3. le clustering : par exemple, les rentabilités élevées en valeur absolue sont suivies par des rentabilités élevées en valeur absolue.

Les deux premiers faits stylisés peuvent s'observer sur la Figure 1.5 à l'aide des QQ-plot et densité de la queue des pertes de l'indice de marché français CAC 40 relativement à la loi Normale. Le troisième est révélé par les grappes de volatilité de la Figure 1.2.

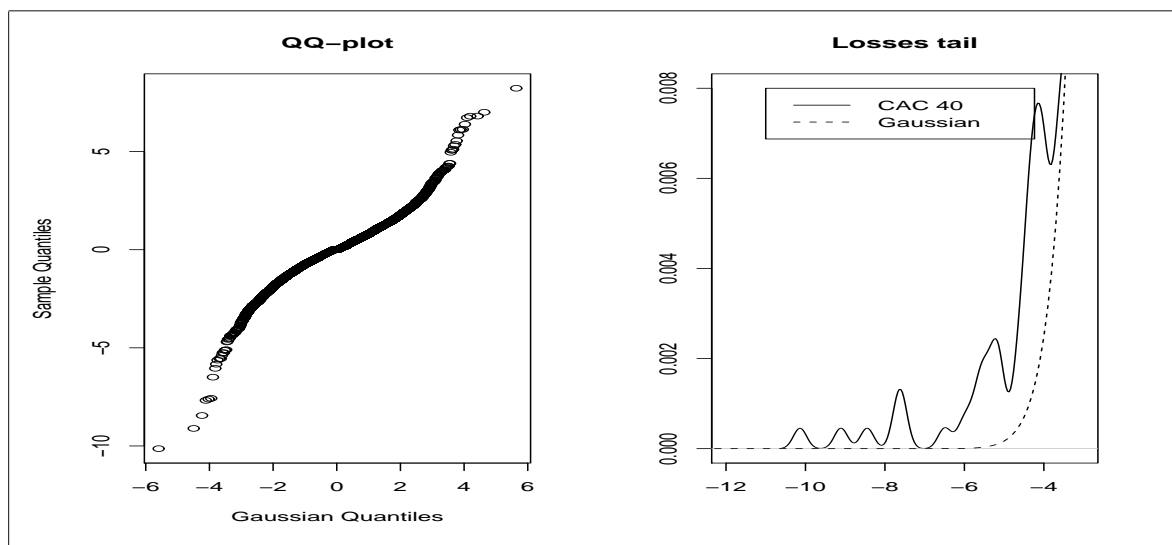


FIGURE 1.5 – QQ-plot et distribution de la queue des pertes du CAC 40 relativement à la loi Normale

Nous terminons cette section sur la VaR par les techniques pour évaluer sa justesse. L'évaluation d'une VaR peut se faire de deux manières :

- ex-ante, à travers les tests d'adéquation statistiques des modélisations adaptées aux rentabilités financières (dans le cas de VaR paramétriques),
- ex-post, via les backtests : pour les réaliser, nous calculons la VaR sur un échantillon d'apprentissage et nous déterminons le nombre d'*exceptions* (rentabilités inférieures à la VaR) sur l'échantillon de backtest. Pour que la VaR soit adéquate aux données de marché, il faut que le pourcentage d'exceptions soit proche du niveau  $\alpha$  de la VaR.

**Conseil pratique de gestion**

*La volatilité et la VaR sont les deux mesures synthétiques du risque les plus utilisées en gestion. Un gérant pourra ainsi déterminer le risque global de variation de son portefeuille et le comparer très rapidement aux portefeuilles concurrents ayant un style de gestion par exemple similaire.*

*En outre, un gérant pourra aussi distinguer dans son portefeuille les différentes contributions des actifs à la volatilité ou VaR globales du portefeuille. Il pourra ainsi peut-être supprimer un actif dont la contribution au risque global est trop forte.*

## 1.3 Mesurer la performance d'investissement

Outre le risque essentiel à estimer et quantifier, il faut aussi, lorsque l'on réalise un investissement, mesurer sa performance : en fait ceci est ce qui intéresse en premier lieu tout investisseur. Mais comment mesurer cette performance ?

### 1.3.1 Une première mesure synthétique

#### Performance d'un indice actions

Observons sur la Figure 1.6 l'évolution mensuelle de l'indice américain Standard & Poor's entre décembre 1927 et juillet 2007.

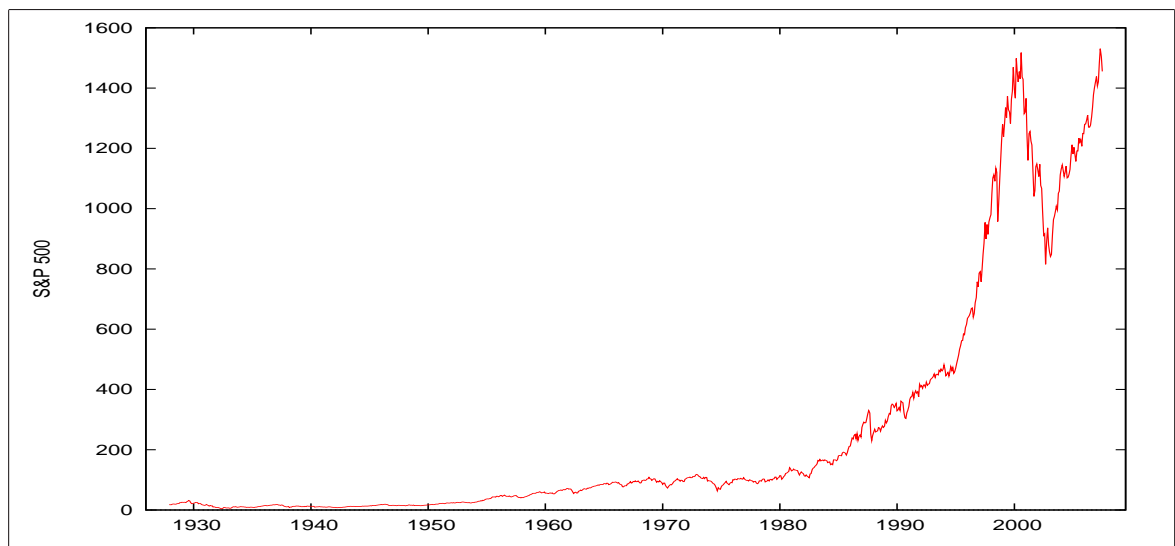


FIGURE 1.6 – Évolution de l'indice S&P 500

Fin décembre 1927, cet indice a une valeur de 17.66 et termine fin juillet 2007 à 1455.27, où il commence sa baisse avec la crise des subprimes. Si un investisseur avait placé 1 dollar dans cet indice en décembre 1927, il aurait accumulé jusqu'en juillet 2007  $1455.27/17.66 = 82.40$  dollars : il aurait donc multiplié sa richesse initiale par 82.40. Nous pouvons considérer un autre chiffre plus utilisé décrivant non plus la multiplication du capital initial mais la richesse relative ajoutée à la richesse initiale (et non pas la seule différence de richesse, mesure absolue, qui sera d'autant plus importante que la richesse initiale est élevée). Ici ce chiffre serait égal à  $(82.40 - 1)/1 = 8140\%$ . Il correspond en fait à la rentabilité de l'investissement de 1 dollar en décembre 1927. Nous pouvons donc conclure à nouveau à l'aide de ce chiffre à une performance importante de l'investissement.

Formellement, si nous notons  $W_0$  la richesse initiale et  $W_T$  la richesse finale, la rentabilité  $R$  est égale à :

$$R = \frac{W_T - W_0}{W_0} = \frac{W_T}{W_0} - 1$$

Cette expression est appelée rentabilité arithmétique. Lorsque la rentabilité arithmétique est faible et proche de 0 (ceci est le cas lorsque les données sont de périodicité courte, comme des données quotidiennes), ce qui revient à ce que le quotient  $\frac{W_T}{W_0}$  soit proche de 1, nous pouvons utiliser la rentabilité logarithmique, appelée aussi log-rentabilité ou encore rentabilité géométrique. En effet, nous avons à partir d'un développement limité à l'ordre 1 l'approximation suivante :

$$\ln \frac{W_T}{W_0} \approx \frac{W_T}{W_0} - 1 = R \quad \text{pour} \quad \frac{W_T}{W_0} \rightarrow 1$$

Néanmoins, l'inconvénient des log-rentabilités est le fait que la log-rentabilité d'un portefeuille n'est pas égale à la somme des log-rentabilités des actifs le composant, contrairement à la rentabilité arithmétique.

Enfin, nous avons réduit le taux de rentabilité d'un titre au taux de gain en capital. Or il faudrait y ajouter le taux de rémunération du titre défini par le *dividend yield*, rapport dividendes sur prix, ce qui donne l'expression réelle de la rentabilité  $R'$  suivante :

$$R' = \frac{W_T - W_0 + D}{W_0} = R + \frac{D}{W_0}$$

avec  $D$  les dividendes sur la période d'investissement.

Or le *dividend yield* peut être considéré comme négligeable par rapport au taux de gain en capital pour des périodicités courtes ; c'est pour cela que l'on réduit souvent la rentabilité à ce seul taux.

### Justification statistique de l'utilisation de la rentabilité

Ce paragraphe intéressera les étudiants ayant des connaissances en statistiques élaborées.

La justification de l'utilisation de la rentabilité peut se faire aussi de manière statistique. En effet, étudions la série temporelle de l'indice S&P 500. Nous y appliquons au préalable la transformation de Box-Cox et plus particulièrement celle du logarithme, dans le but de *stabiliser* la variance des données. Nous pouvons conclure tout de même à la non-stationnarité de l'indice américain. En effet :

1. la Figure 1.7 révèle une tendance globale à la hausse,
2. elle révèle aussi la décroissance lente des autocorrélations significativement non nulles de la série temporelle des valeurs du S&P 500,
3. et enfin le test statistique de Dickey-Fuller augmenté conclue à la présence d'une racine unitaire dans le processus de l'indice et donc à sa non-stationnarité. En effet, pour n'importe quel ordre de retard et pour les trois différents modèles (cf. Lardic et Mignon [16] pour plus de précisions), nous avons des p-value de test très supérieures à 0.9 : on accepte donc l'hypothèse nulle de présence de racine unitaire équivalent à la non-stationnarité du processus.

Il nous faut donc stationnariser les données en les différenciant une fois. Ces nouvelles données se révèlent alors stationnaires :

1. pas de tendance dans la série temporelle des différences premières des logarithmes du S&P 500 (cf. Figure 1.8),
2. l'autocorrélogramme de la Figure 1.8 ne révèle pas de décroissance lente des autocorrélations,
3. et le test de Dickey-Fuller augmenté ne révèle pas la présence d'une racine unitaire.

Les différences premières de la série des logarithmes du S&P 500 sont équivalentes aux log-rentabilités. Nous comprenons alors pourquoi les rentabilités seront des objets adéquats à la modélisation statistique, puisqu'elles se révèlent être stationnaires *en moyenne*.

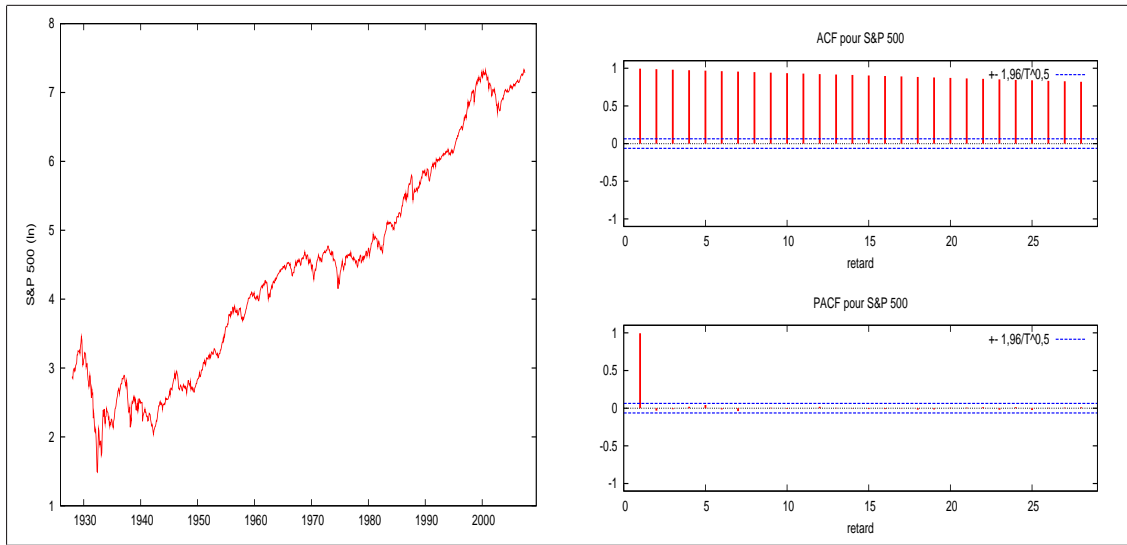


FIGURE 1.7 – Évolution de l'indice S&P 500 en log et autocorrélogrammes

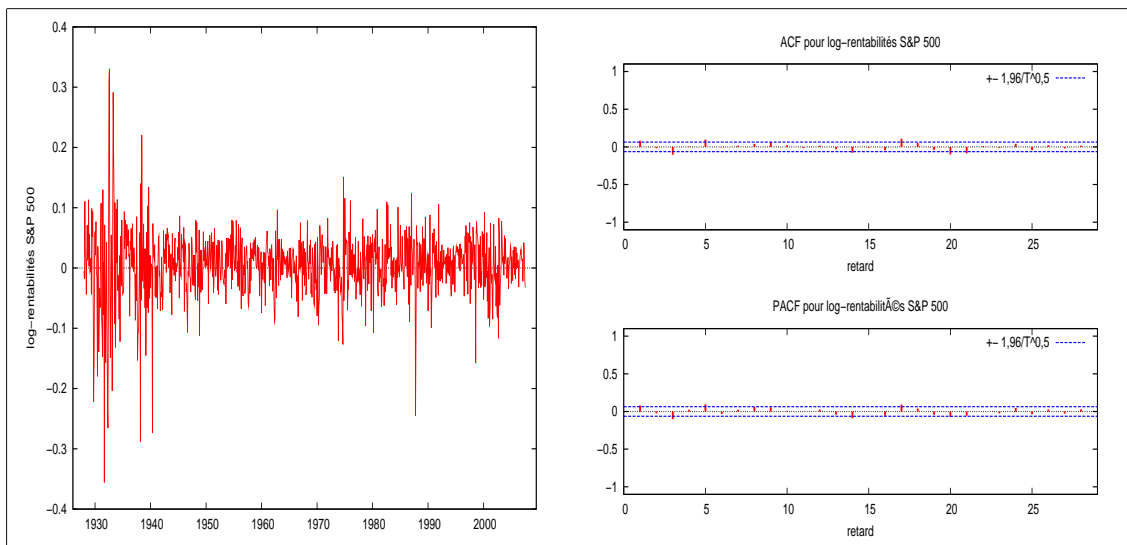


FIGURE 1.8 – Évolution des différences premières l'indice S&P 500 en log et autocorrélogrammes

### 1.3.2 Mesures de rentabilité ajustée du risque

La rentabilité est donc une très bonne mesure de la performance. Mais seule elle n'est pas suffisante pour juger de la bonne ou mauvaise performance d'un investissement.

Supposons deux investissements A et B ayant au même horizon d'un an une rentabilité semblable. Néanmoins, le risque pris par l'investisseur pour l'investissement A est relativement faible (volatilité ou VaR faible) alors que celui pris par l'investisseur B est beaucoup plus élevé. Ce dernier ne va donc pas être satisfait de la performance de son investissement puisqu'il aurait pu prendre moins de risque pour le même gain avec l'investissement A.

Une judicieuse mesure de la performance doit donc prendre en compte le risque rémunéré par la rentabilité de l'investissement. C'est ainsi que nous allons utiliser des mesures de la rentabilité ajustée du risque.

Nous avons plusieurs possibilités suivant que l'investisseur mesure sa performance de manière absolue ou relative à un benchmark.

#### Mesure absolue

Ces mesures évaluent la performance sans référence à un benchmark. Nous présentons deux ratios :

1. Le ratio de Sharpe  $S_i$  pour un portefeuille  $i$ , défini par Sharpe en 1966, mesure la rémunération par l'investissement, en excès du taux sans risque  $r_f$ , d'une unité de risque, mesuré par la volatilité : 
$$S_i = \frac{\mathbb{E}(R_i) - r_f}{\sigma(R_i)}$$
. Une alternative au ratio de Sharpe peut être proposée avec le risque non plus mesuré par la volatilité mais la VaR (en rentabilité) : 
$$S'_i = \frac{\mathbb{E}(R_i) - r_f}{|\text{VaR}_i|}$$
.
2. Le ratio de Treynor mesure le rapport entre l'excès de rentabilité de l'investissement et son risque systématique déterminé par le  $\beta$  issu du CAPM : 
$$T_i = \frac{\mathbb{E}(R_i) - r_f}{\beta_i}$$
.

#### Mesure relative

Ces mesures évaluent la performance en référence à celle d'un benchmark. Nous proposons dans ce cours deux ratios :

1. L'alpha de Jensen  $\alpha_i$  pour un portefeuille  $i$ , défini par Jensen en 1968, est égal à la constante du modèle de marché :  $\alpha_i = [\mathbb{E}(R_i) - r_f] - [\beta_i(\mathbb{E}(R_B) - r_f)]$ . Cet indicateur mesure donc la part de la rentabilité non prévue par le CAPM et que l'on peut accrédi-ter à l'investisseur gérant son capital, qui, si  $\alpha_i > 0$ , a pu *battre* son benchmark de rentabilité  $R_B$ . Le ratio de Black-Treynor  $\frac{\alpha_i}{\beta_i}$  permet de comparer des investissements de benchmarks différents.
2. Le ratio d'information s'apparente à un ratio de Sharpe sur les rentabilité et risque résiduels en excès du benchmark : 
$$IR_i = \frac{\mathbb{E}(R_i) - \mathbb{E}(R_B)}{\sigma(R_i - R_B)}$$
. Le dénominateur est appelé *tracking-error volatility* et par abus de langage *tracking-error* ou TE : une valeur faible de la *tracking-error* signifie que le risque de l'investissement est proche de celui de son benchmark. L'objectif pour un gérant benchmarké est bien entendu d'avoir un  $IR$  élevé, ce qui signifie prendre des risques similaires au benchmark tout en ayant une rentabilité plus élevée. Tout le problème est de savoir si le benchmark est efficient : dans le cas contraire, le battre serait relativement aisé !

Ces différents ratios peuvent avoir des insuffisances comme le fait d'être dépendants pour certains du CAPM dont nous avons vu les limites plus haut. Néanmoins, ils restent très utilisés par les gérants pour déterminer la performance de leurs investissements.

**Conseil pratique de gestion**

*Le ratio de Sharpe et la ratio d'information sont les mesures les plus utilisées par les gérants. Avoir un ratio de Sharpe par exemple de 1 signifie une performance du portefeuille importante. Cette partie sur le risque et la performance a ainsi pu développer certaines techniques de style de gestion, et de mesure du risque et de la performance. A ce stade des connaissances, il est possible de gérer un portefeuille de manière relativement efficace. Néanmoins, pour améliorer cette gestion, il va falloir porter un intérêt non négligeable à la construction de l'allocation.*

## CHAPITRE 2

# ALLOCATION ET STRATÉGIES D'INVESTISSEMENT

### 2.1 Allocation efficiente de Markowitz

Bernstein [5] affirme que "l'intuition la plus célèbre de l'histoire moderne de la finance et de l'investissement se trouve dans un court article intitulé *Portfolio Selection*". Cet article [19] est écrit par Markowitz en 1952. Il pose les bases de la Théorie Moderne du Portefeuille (cf. Aftalion, Poncet et Portait [1] pour une revue de la TMP).

Nous allons dans cette section étudier de manière assez quantitative mais claire, en donnant à chaque fois toutes les étapes des démonstrations mathématiques, la construction de portefeuilles suivant les préceptes de Markowitz. Avant d'entrer dans le calcul à proprement dit de l'allocation optimale, nous allons introduire les principes essentiels d'aversion au risque et de diversification.

#### 2.1.1 Critères de rentabilité et de risque pour la sélection d'un portefeuille

La théorie de Markowitz est une théorie *normative*, c'est-à-dire qu'elle décrit le comportement que devrait suivre sous certaines hypothèses un investisseur rationnel pour construire un portefeuille dans un univers incertain. Il conclut qu'un investisseur optimise le couple rentabilité-risque de son portefeuille.

Pourtant, la première intuition est de choisir un portefeuille d'actifs qui a l'espérance de rentabilité la plus élevée : ce principe est appelé le critère de Pascal. Une telle hypothèse est en réalité trop simpliste car le risque de perte d'un portefeuille est primordial dans le choix de l'investisseur. Ceci a déjà été introduit dans la section 1.3.2 sur les mesures de performance.

Mais nous pouvons l'illustrer aussi par le célèbre paradoxe de Saint-Pétersbourg imaginé par Bernoulli au 18<sup>ième</sup> siècle. Une pièce non truquée est lancée autant de fois  $i$  qu'il est nécessaire pour que le côté face apparaisse. Lorsque le côté face sort, le jeu s'arrête et le joueur reçoit  $2^i$  euros. Quelle est la mise initiale pour que le jeu soit équitable ? Si nous calculons ce droit d'entrée sur la seule espérance  $\mathbb{E}$  de gain du jeu, alors la participation devient prohibitive puisqu'elle est infinie.

En effet, le jeu est composé d'un nombre infini dénombrable de gains  $x = [2, 2^2, \dots, 2^i, \dots]$  qui ont les probabilités d'occurrence correspondantes  $\pi = \left[ \frac{1}{2}, \frac{1}{2^2}, \dots, \frac{1}{2^i}, \dots \right]$ . Selon le critère de Pascal, le coût d'entrée serait égal à l'espérance de gain du jeu :

$$\mathbb{E} = \sum_{i=1}^{+\infty} \pi_i x_i = \sum_{i=1}^{+\infty} \frac{1}{2^i} 2^i = \sum_{i=1}^{+\infty} 1 = +\infty$$

Personne n'accepterait de donner cette somme infinie ! Or, le droit d'entrée la plupart du temps proposé à ce jeu est une petite somme. Cela signifie que d'autres facteurs, autre que l'espérance de rentabilité, interviennent dans la décision du joueur.

Nous avons recours alors à la notion de fonction d'utilité, intégrant la décroissance de l'utilité marginale (fonction d'utilité concave) : 1000 euros de plus lorsque l'on possède déjà 1000 euros n'est pas 2 fois plus utile au joueur et donc il ne sera pas prêt à sacrifier en droit d'entrée la même somme plus le jeu progressera. L'*aversion au risque* est une notion essentielle pour comprendre la décision du joueur.

Ainsi, il en est de même pour un investisseur qui sélectionnera le portefeuille qui lui procurera l'espérance d'utilité la plus élevée. Cette espérance d'utilité sera une fonction de l'espérance de rentabilité et du risque induit par le portefeuille.

### 2.1.2 Principe de la diversification

Le principe de la diversification dans la sélection d'un portefeuille relève du vieil adage : "Ne jamais mettre tous ses oeufs dans le même panier". Un exemple simple mais réducteur des bienfaits de la diversification peut être donné lorsque nous calculons la variance d'un portefeuille composé d'actifs indépendants. Soit  $R_P$  la rentabilité d'un portefeuille équi-pondéré composé de  $N$  actifs risqués de rentabilité  $R_i$  non corrélés.

Nous avons  $R_P = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N R_i$ . La variance  $V(R_P)$  du portefeuille, que nous utiliserons comme mesure du risque<sup>1</sup>, a pour expression d'après le Théorème Central Limite :

$$V(R_P) = \frac{1}{N^2} \sum_{i=1}^N V(R_i) = \frac{1}{N^2} N \sigma^2 = \frac{\sigma^2}{N} \rightarrow 0 \text{ pour } N \rightarrow +\infty.$$

Plus le nombre d'actifs croît, plus la variance du portefeuille diminue. Le risque décroît avec la diversification. Néanmoins, détenir un nombre infini d'actifs non corrélés est irréaliste.

Mais étant donné que leur corrélation n'est souvent pas parfaite (c'est-à-dire égale à 1), il est possible de diminuer son risque en diversifiant son investissement. En effet, soient  $X$  et  $Y$  2 variables aléatoires dont le coefficient de corrélation linéaire est  $\rho$  ( $-1 \leq \rho \leq 1$ ). Si nous mesurons le risque par la volatilité, nous avons :

$$\sigma_{X+Y}^2 = \sigma_X^2 + \sigma_Y^2 + 2\rho\sigma_X\sigma_Y = (\sigma_X + \sigma_Y)^2 + 2(\rho - 1)\sigma_X\sigma_Y$$

Ainsi,  $\sigma_{X+Y} \leq \sigma_X + \sigma_Y$ . Si les actifs varient très différemment suivant les évolutions des marchés, il est possible de construire un portefeuille de risque plus faible que la somme des risques des actifs le composant.

Nous allons voir dans la suite comment déterminer le portefeuille optimal avec un nombre fini  $N$  d'actifs à partir de l'espérance de rentabilité et du risque (critère *moyenne-variance*).

### 2.1.3 Construction d'un portefeuille optimal

Dans la multiplicité de choix proposés à l'investisseur en termes de rentabilité et variance de portefeuille, Markowitz introduit la notion de portefeuille *efficient*. "Qui ne risque rien n'a rien" : pour obtenir une espérance de rentabilité plus élevée, il faut accepter un risque plus important. Le risque est l'effort nécessaire à l'obtention d'une rentabilité. Un portefeuille *efficient* est celui qui offre la rentabilité attendue la plus forte pour un niveau de risque donné, ou qui a le risque le plus faible pour une rentabilité attendue donnée. L'ensemble des portefeuilles efficients de l'univers d'actifs considéré forme la *Frontière Efficiente*.

Nous allons distinguer deux cas pour déterminer la frontière efficiente suivant la présence ou non d'un actif sans risque. Nous nous inspirons de l'article de Merton [20] de 1972 pour les démonstrations qui vont suivre.

1. Nous avons vu précédemment que la variance n'était pas une bonne mesure des risques extrêmes. Le développement de sélection de portefeuille à partir de la VaR est envisageable mais n'est pas l'objet de cette section.

Avant tout voici quelques brefs rappels mathématiques :

$$\begin{array}{ll} \mathbb{V}(AX) = A\mathbb{V}(X)A' & \mathbb{V}(A+X) = \mathbb{V}(X) \\ \frac{\partial X'A}{\partial X} = A & \frac{\partial X'AX}{\partial X} = 2AX \text{ si } A \text{ est symétrique} \\ (AB)' = B'A' & D' = D \text{ si } D \text{ est un scalaire} \\ AB = C \Leftrightarrow A^{-1}AB = A^{-1}C \Leftrightarrow B = A^{-1}C & \text{si } A \text{ est inversible} \end{array}$$

### Absence d'un actif sans risque

#### Frontière efficiente

La détermination des poids optimaux se fait suivant la minimisation de la variance du portefeuille sous la contrainte d'une rentabilité objectif  $\mu_p$  et le fait que la somme des poids est égale à 1. Formellement, nous avons :

$$\min_{\omega} \omega' \Sigma \omega$$

sous les contraintes :

$$\begin{array}{l} \omega' \mu = \mu_p \\ \omega' e = 1 \end{array}$$

avec  $\omega$  le vecteur de poids des actifs composant le portefeuille,  $\mu$  le vecteur des rentabilités des actifs,  $\Sigma$  la matrice de variance-covariance des rentabilités des actifs, symétrique et définie positive<sup>2</sup>, et  $e = [1 \ 1 \ \dots \ 1]'$ .

Résoudre ce problème de minimisation nous permet de définir l'équation de la frontière efficiente définie par Markowitz. Nous déterminons pour cela le lagrangien :

$$\mathcal{L} = \omega' \Sigma \omega + \lambda_1 (\mu_p - \omega' \mu) + \lambda_2 (1 - \omega' e)$$

avec  $\lambda_1$  et  $\lambda_2$  les multiplicateurs de Lagrange. La condition d'optimalité du premier ordre s'écrit :

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \omega} = 2\Sigma\omega - \lambda_1\mu - \lambda_2e = 0 \Leftrightarrow \omega = \frac{\lambda_1}{2}\Sigma^{-1}\mu + \frac{\lambda_2}{2}\Sigma^{-1}e \quad (2.1)$$

En combinant avec les 2 contraintes, nous avons :

$$\begin{cases} \omega' \mu = \mu_p \\ \omega' e = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \mu' \omega = \mu_p \\ e' \omega = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda_1 \mu' \Sigma^{-1} \mu + \lambda_2 \mu' \Sigma^{-1} e = 2\mu_p \\ \lambda_1 e' \Sigma^{-1} \mu + \lambda_2 e' \Sigma^{-1} e = 2 \end{cases}$$

Nous posons les constantes suivantes :

$$A = e' \Sigma^{-1} \mu = \mu' \Sigma^{-1} e, \quad B = \mu' \Sigma^{-1} \mu, \quad \text{et } C = e' \Sigma^{-1} e.$$

Le système à résoudre en  $\lambda_1$  et  $\lambda_2$  devient :

$$\begin{cases} \lambda_1 B + \lambda_2 A = 2\mu_p \\ \lambda_1 A + \lambda_2 C = 2 \end{cases}$$

Nous obtenons finalement les expressions des multiplicateurs de Lagrange suivants :

$$\begin{array}{l} BC\lambda_1 - A^2\lambda_1 = 2C\mu_p - 2A \Leftrightarrow \lambda_1 = 2 \frac{C\mu_p - A}{D} \\ A^2\lambda_2 - BC\lambda_2 = 2A\mu_p - 2B \Leftrightarrow \lambda_2 = 2 \frac{B - A\mu_p}{D} \end{array}$$

2.  $\Sigma$  est définie positive signifie que  $\forall x \in \mathbb{R}^n, x' \Sigma x \geq 0$  et  $x' \Sigma x = 0 \Rightarrow x = 0$ . Comme elle est en outre symétrique, nous pouvons réduire cette définition au fait que toutes ses valeurs propres doivent être strictement positives.

avec  $D = BC - A^2$ . Enfin, en substituant les expressions des multiplicateurs dans l'équation (2.1), nous obtenons les poids du portefeuille de variance minimum  $\omega_p$  suivants :

$$\omega_p = g + h\mu_p$$

$$\text{avec } g = \frac{1}{D}[B(\Sigma^{-1}e) - A(\Sigma^{-1}\mu)] \text{ et } h = \frac{1}{D}[C(\Sigma^{-1}\mu) - A(\Sigma^{-1}e)].$$

Il est commode de représenter la frontière efficiente, c'est-à-dire l'ensemble des portefeuilles efficients, dans le plan  $(\mu_p, \sigma_p)$  avec (cf. Figure 2.1<sup>3</sup>) :

$$\begin{aligned} \sigma_p &= \sqrt{\omega_p' \Sigma \omega_p} = \sqrt{\left(\frac{\lambda_1}{2} \mu' \Sigma^{-1} + \frac{\lambda_2}{2} e' \Sigma^{-1}\right) \Sigma \omega_p} \\ &= \sqrt{\frac{\lambda_1}{2} \mu' \omega_p + \frac{\lambda_2}{2} e' \omega_p} = \sqrt{\frac{\lambda_1}{2} \mu_p + \frac{\lambda_2}{2}} \\ &= \sqrt{\frac{1}{D} (C\mu_p^2 - 2A\mu_p + B)} \end{aligned}$$

La partie de la frontière efficiente située en-dessous du point où l'écart-type est minimum (correspondant, nous le verrons dans le paragraphe suivant, au portefeuille GMV) n'est bien entendu pas optimale puisqu'il est possible d'obtenir, pour un même risque, une rentabilité plus élevée.

#### Portefeuille global de variance minimum

Outre cette équation définissant l'ensemble des portefeuilles efficients, nous pouvons déterminer le portefeuille ayant la variance la plus faible. Nous l'appelons le portefeuille global de variance minimum (Global Minimum Variance ou GMV). Il se calcule à partir du programme d'optimisation suivant :

$$\min_{\omega} \omega' \Sigma \omega$$

sous la seule contrainte :

$$\omega' e = 1$$

Le lagrangien s'écrit alors :

$$\mathcal{L} = \omega' \Sigma \omega + \lambda(1 - \omega' e)$$

La première condition d'optimalité nous donne la relation suivante :

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \omega} = 2\Sigma\omega - \lambda e = 0 \Leftrightarrow \omega = \frac{\lambda}{2} \Sigma^{-1} e \quad (2.2)$$

En la combinant avec la contrainte, nous obtenons :

$$\frac{\lambda}{2} e' \Sigma^{-1} e = 1 \Leftrightarrow \lambda = \frac{2}{C}$$

Ainsi, nous avons les poids du portefeuille GMV  $\omega_g$  suivants :

$$\omega_g = \frac{1}{C} \Sigma^{-1} e$$

Nous avons aussi les expressions de la rentabilité moyenne  $\mu_g$  et de l'écart-type  $\sigma_g$  du portefeuille GMV suivantes :

$$\begin{aligned} \mu_g &= \mu' \omega_g = \frac{A}{C} \\ \sigma_g &= \sqrt{\omega_g' \Sigma \omega_g} = \sqrt{\frac{1}{C}} \end{aligned}$$

3. Les frontières efficientes de la Figure 2.1 sont déterminées à l'aide d'un cas particulier issu de l'optimisation d'un portefeuille composé de 3 indices actions.

### Présence d'un actif sans risque

#### Frontière efficiente

Avec la présence d'un actif sans risque, la contrainte de somme des poids égale à 1 n'est plus nécessaire puisqu'il sera investi  $(1 - \omega'e)$  dans l'actif sans risque. Le programme d'optimisation déterminant le portefeuille de variance minimum avec comme rentabilité objectif  $\mu_p$  est défini de la manière suivante :

$$\min_{\omega} \omega' \Sigma \omega$$

sous la contrainte :

$$\omega' \mu + (1 - \omega'e)r_f = \mu_p$$

avec  $r_f$  la rentabilité de l'actif sans risque. Le lagrangien s'écrit :

$$\mathcal{L} = \omega' \Sigma \omega + \lambda(\mu_p - \omega' \mu - (1 - \omega'e)r_f)$$

Nous différencions  $\mathcal{L}$  par rapport à  $\omega$  et annulons cette dérivée à 0 :

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \omega} = 2\Sigma\omega - \lambda(\mu - r_f e) = 0 \Leftrightarrow \omega = \frac{\lambda}{2} \Sigma^{-1}(\mu - r_f e) \quad (2.3)$$

En combinant avec la contrainte, nous avons :

$$\begin{aligned} \omega' \mu + (1 - \omega'e)r_f = \mu_p &\Leftrightarrow \frac{\lambda}{2} \mu' \Sigma^{-1}(\mu - r_f e) - \frac{\lambda}{2} e' \Sigma^{-1}(\mu - r_f e) r_f = \mu_p - r_f \\ &\Leftrightarrow \frac{\lambda}{2} = \frac{\mu_p - r_f}{(\mu - r_f e)' \Sigma^{-1}(\mu - r_f e)} \end{aligned}$$

Ainsi, nous avons d'après l'équation (2.3) les poids du portefeuille de variance minimum  $\omega_p$  égaux à :

$$\omega_p = \frac{\mu_p - r_f}{(\mu - r_f e)' \Sigma^{-1}(\mu - r_f e)} \Sigma^{-1}(\mu - r_f e) = c_p \Sigma^{-1}(\mu - r_f e)$$

Et si nous définissons les notations suivantes :  $\tilde{\mu} = \mu - r_f e$ ,  $\tilde{A} = e' \Sigma^{-1} \tilde{\mu}$ ,  $\tilde{B} = \tilde{\mu}' \Sigma^{-1} \tilde{\mu}$ , nous obtenons :

$$\omega_p = \frac{\tilde{\mu}_p}{\tilde{B}} \Sigma^{-1} \tilde{\mu} \quad (2.4)$$

avec  $c_p = \frac{\tilde{\mu}_p}{\tilde{B}}$ .

L'écart-type de ce portefeuille a pour expression :

$$\sigma_p = \sqrt{\omega_p' \Sigma \omega_p} = \sqrt{\frac{\tilde{\mu}_p^2}{\tilde{B}}} = \sqrt{\frac{1}{\tilde{B}}} |\tilde{\mu}_p|$$

ce qui nous donne l'équation de la frontière efficiente. Nous remarquons que cette dernière est une droite croissante lorsque  $\mu_p > r_f$  et décroissante lorsque  $\mu_p < r_f$ . Ce second cas n'est bien entendu pas optimal puisque pour un même risque, nous pouvons obtenir un rendement plus élevé.

La frontière efficiente (cf. Figure 2.1) se réduit ainsi à la tangente croissante à la frontière efficiente des actifs risqués et ayant pour origine le taux sans risque. Nous appelons cette droite la *Capital Market Line*. Nous pouvons observer que l'introduction de l'actif sans risque améliore sensiblement le ratio de Sharpe des portefeuilles puisque pour un même risque, il est possible d'obtenir un rendement plus élevé.

*Portefeuille tangente*

Dans l'ensemble des portefeuilles efficients avec la présence d'un actif sans risque, il existe un portefeuille uniquement composé d'actifs risqués. Ce portefeuille est à l'intersection de la frontière efficiente déterminée avec l'absence d'un actif sans risque avec celle déterminée précédemment avec la présence d'un actif sans risque. Étant donné que cette dernière est une droite, le portefeuille composé uniquement d'actifs risqués, appelé portefeuille de marché, est le portefeuille tangent. Nous ajoutons à l'équation (2.4) donc la contrainte de somme des poids égale à 1 pour obtenir l'expression de ses poids.

Ainsi, ses poids  $\omega_q$  sont tels que :

$$\begin{aligned}\omega_q' e &= 1 &\Leftrightarrow e' \omega_q &= 1 \\ &&\Leftrightarrow c_q e' \Sigma^{-1} \tilde{\mu} &= 1 \\ &&\Leftrightarrow c_q &= \frac{1}{\bar{A}}\end{aligned}$$

Ainsi,

$$\omega_q = \frac{1}{\bar{A}} \Sigma^{-1} \tilde{\mu}$$

Et l'espérance de rentabilité en excès du taux sans risque et l'écart-type du portefeuille tangent ont pour expression :

$$\begin{aligned}\tilde{\mu}_q &= \tilde{\mu}' \omega_q = \frac{\tilde{B}}{\bar{A}} \\ \sigma_q &= \sqrt{\omega_q' \Sigma \omega_q} = \sqrt{\frac{\tilde{B}}{\bar{A}^2}}\end{aligned}$$

Il est intéressant de préciser pour conclure que ce portefeuille tangent est celui qui a le ratio de Sharpe maximum, parmi les portefeuilles composés uniquement d'actifs risqués, égal à :

$$S_q = \frac{\tilde{\mu}_q}{\sigma_q} = \sqrt{\tilde{B}}$$

En effet, le portefeuille tangent appartient bien à la droite la plus pentue, parmi celles issues de l'origine  $r_f$  et coupant la frontière efficiente des actifs risqués.

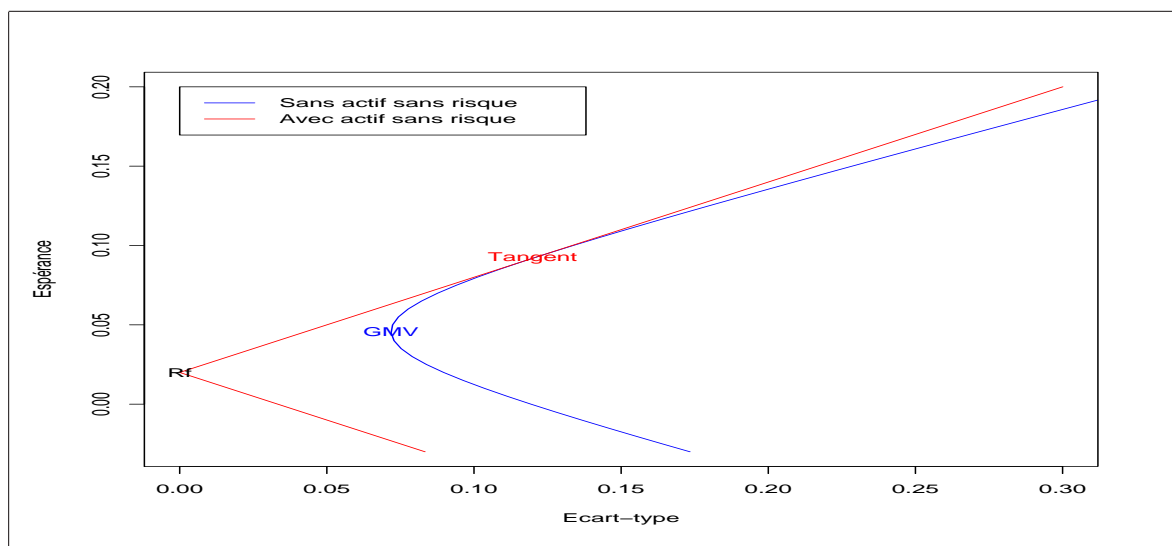


FIGURE 2.1 – Frontières efficientes

### Frontière efficiente avec un paramètre d'aversion au risque

Il est possible aussi de construire la frontière efficiente des actifs risqués à l'aide d'une formulation différente mais très utilisée en pratique. Nous allons alors tenter de maximiser l'utilité d'un investisseur rationnel qui sera caractérisé par un paramètre d'aversion au risque  $\gamma > 0$ <sup>4</sup>.

Le portefeuille ainsi obtenu est le portefeuille *optimal* qui maximise l'espérance de l'utilité de l'investisseur  $\mathbb{E}[U(W)]$  avec  $W$  la richesse de l'investisseur. Dans le cadre théorique de Markowitz, il est utilisé une fonction d'utilité quadratique. Maximiser cette fonction objectif revient à maximiser, par rapport à  $\omega$ , la fonction d'optimisation de moyenne-variance :

$$\max_{\omega} \mathbb{E}[U(W)] \Leftrightarrow \max_{\omega} \left( \omega' \tilde{\mu} - \frac{\gamma}{2} \omega' \Sigma \omega \right)$$

Nous remarquons que plus l'individu est averse au risque ( $\gamma$  croît), plus le risque du portefeuille optimal pénalise son espérance de rentabilité : le portefeuille maximisé est donc moins risqué. La maximisation sans contraintes de cette fonction a pour solution les poids optimaux  $\omega^*$  :

$$\omega^* = \frac{1}{\gamma} \Sigma^{-1} \tilde{\mu}$$

Ces derniers sont déterminés à l'aide de la résolution de l'optimisation d'une fonction quadratique qui annule la dérivée première en  $\omega$  et a une dérivée seconde négative, ce qui implique sa maximisation.

Le portefeuille tangent est déterminé pour une aversion au risque :  $\gamma = \tilde{A} = e' \Sigma^{-1} \tilde{\mu}$ .

Des contraintes peuvent être ajoutées et les poids optimaux sont alors obtenus à l'aide de méthodes de maximisation numériques de l'utilité. Des exemples de contraintes sont l'interdiction de vente à découvert, les poids ne peuvent alors pas être négatifs, ou encore l'impossibilité de recourir à l'effet de levier, c'est-à-dire que l'investissement est auto-financé et le poids dans l'actif sans risque ne doit donc pas être négatif (pas d'emprunt).

### Limites de l'optimisation de Markowitz

Nous allons présenter 4 limites à l'optimisation de portefeuille suivant Markowitz qui nous semblent essentielles :

1. La première concerne la modélisation statistique sous-jacente à l'optimisation moyenne-variance : effectivement, réduire les actifs à leur moments d'ordre 1 (moyenne) et 2 (variance) revient à modéliser les actifs du portefeuille optimal par une loi gaussienne. Or certains actifs ne sont pas gaussiens et peuvent avoir des profils de distribution très différents : l'optimisation de Markowitz fournira alors des résultats peu cohérents avec la réalité. Nous pensons aux actions risquées mais aussi aux titres de créances qui devraient être modélisés plus précisément.
2. La deuxième est la dépendance de l'optimisation de Markowitz à l'estimation des rendements moyens. Ces rendements estimés pour une période d'allocation peuvent évoluer à court-terme : or un changement très faible de la moyenne des rendements aura des conséquences démesurément importantes sur l'allocation, ce qui semble ennuyeux dans la pratique. L'optimisation est donc relativement instable.
3. La troisième survient lorsque le nombre d'actifs à profils similaires est très importants. Alors la caractéristique définie positive de la matrice de variance-covariance peut être mise à mal. Des méthodes d'extraction de facteurs communs (ACP) ou de shrinkage peuvent alors déterminer une matrice de variance-covariance plus facile à utiliser. L'APT (section 1.2.2) peut ainsi être utilisée pour déterminer les facteurs latents et calculer une matrice de variance-covariance sur ces facteurs de risque orthogonaux.

4. La calibration de cette aversion n'est pas évidente. Elle diffère fortement entre les individus. Nous pouvons néanmoins déterminer un coefficient moyen. Considérons le portefeuille de marché de rentabilité en excès du taux sans risque  $R_M - r_f$  et de volatilité  $\sigma_M$ . Alors, nous définissons  $\gamma = \frac{R_M - r_f}{\sigma_M^2}$ .

4. La dernière limite est opérationnelle : en effet, les optimisations étudiées précédemment donnent des solutions simples mais dans la réalité les contraintes sur les poids sont plus nombreuses et rendent l'optimisation difficile. En effet, régulièrement, un investisseur peut vouloir mettre des limites d'achat ou de vente sur certaines classes d'actifs (on peut penser par exemple aux actions des pays émergents qui sont plus risquées et dont on peut vouloir limiter l'allocation). Les contraintes vont alors influencer fortement les allocations qui ne seront alors plus si optimales que prévues...

#### **Conseil pratique de gestion**

*La méthodologie de Markowitz, dans des conditions de normalité des actifs, permet au gérant de fixer les poids de son portefeuille selon la contrainte qu'il s'est fixée d'objectif de rentabilité par exemple. Ainsi, il est possible de combiner les connaissances pratiques de la première partie avec l'allocation efficiente de Markowitz : dans la gestion stylisée par exemple d'actions défensives, nous allons pouvoir déterminer les poids optimaux entre toutes les actions ayant un  $\beta$  inférieurs à 1 qui ont été sélectionnées. Cette allocation que l'on appelle stratégique, déterminée sur un horizon de moyen-terme, sera certainement ajustée suivant les conditions de marché : ce sera l'allocation que l'on appelle tactique.*

## 2.2 Stratégies buy-and-hold et constant mix

Nous avons étudié précédemment comment allouer les actifs au sein d'un portefeuille en nous focalisant sur l'optimisation de l'allocation suivant les résultats de Markowitz. Maintenant que ces poids sont déterminés, une interrogation s'élève sur la façon dont ils vont être ajustés suivant le profil du flux final que l'on souhaite.

Pour introduire les stratégies d'investissement, nous allons tenter de formaliser la différence fondamentale entre une stratégie naïve, laissant son allocation flotter au gré de l'évolution des prix des actifs la composant, et une stratégie d'allocation fixe à tout moment :

1. la première est une stratégie *buy-and-hold*,
2. et la seconde une stratégie *constant mix*.

Nous nous inspirons de la typologie de Perold et Sharpe développée en 1988 [23] pour présenter ces deux stratégies.

### 2.2.1 Stratégies buy-and-hold

Les stratégies buy-and-hold sont des stratégies qui achètent les actifs et laissent leur poids flotter suivant l'évolution de leur valeur. Il n'y a donc pas de rebalancement des poids des actifs dans le portefeuille. Lorsque la valeur de l'actif s'élève, toutes choses égales par ailleurs, sa proportion dans le portefeuille va s'élever aussi. Formellement, notons la valeur du portefeuille  $P_t$  pour  $t \geq 1$  et  $A_t$  la valeur des  $n$  actifs le composant en  $t$ . Nous avons ainsi :

$$P_{t+1} = P_t \sum_{i=1}^n \omega_t^i \frac{A_{t+1}^i}{A_t^i}$$

$\omega_t^i$  représente le poids alloué à l'actif  $i$  en  $t$ . Dans une stratégie buy-and-hold, les poids évoluent suivant la valeur relative des actifs, et ont pour expression, pour  $t \geq 2$  (les premiers poids sont déterminés au départ de la stratégie) :

$$\omega_t^i = \omega_{t-1}^i \frac{P_{t-1}}{P_t} \frac{A_t^i}{A_{t-1}^i}$$

Supposons que nous ayons deux actifs, une action et un instrument monétaire sans risque. La valeur du portefeuille de stratégie buy-and-hold a les caractéristiques suivantes :

- elle est linéaire par rapport à la valeur de l'action,
- elle ne diminuera jamais en-dessous de la valeur initiale investie dans l'instrument monétaire,
- elle a un "upside" potentiel illimité, c'est-à-dire un potentiel de gain illimité.

### 2.2.2 Stratégies constant mix

Les stratégies constant mix maintiennent une exposition constante des actifs relativement à la valeur du portefeuille. Les poids n'évoluent donc pas suivant la valeur relative des actifs mais restent fixes. Ainsi, comme les valeurs relatives évoluent, il faut dynamiquement réajuster constamment les proportions investies en valeur dans les actifs pour demeurer à la proportion relative définie au départ.

Ainsi, lorsque la valeur d'un actif diminue, toutes choses égales par ailleurs, la proportion relative de cet actif va diminuer au sein du portefeuille. Il va donc falloir acheter de cet actif pour conserver le même poids au sein du portefeuille. Les poids restent ainsi constants. Pour éviter d'acheter ou de vendre des actifs trop régulièrement et diminuer ainsi les coûts de transaction de la stratégie, il est possible de déterminer des seuils de perte (de gain) en-deçà (au-delà) de laquelle (duquel) on commence à revenir aux poids initiaux. Au-dessus (en-dessous), nous laissons filer les poids comme dans la stratégie buy-and-hold.

Supposons à nouveau un portefeuille composé d'une action et d'un taux sans risque. La stratégie constant-mix va acheter l'action après que celle-ci a diminué et va la vendre après que celle-ci a augmenté. Cette stratégie s'avère alors profitable lorsque des retournements de marché sont fréquents et qu'une augmentation (baisse) de l'action est suivie immédiatement d'une baisse (augmentation). Autrement dit, l'anticipation du gérant est un marché actions fortement volatil et flat.

Perold et Sharpe illustre cette caractéristique à l'aide de l'exemple numérique suivant. Supposons que l'action passe dans un premier temps de 100\$ à 90\$, puis dans un second temps revienne à 100\$, et que le monétaire est supposé constant, pour simplifier les calculs. Dans le cas d'une stratégie buy-and-hold, les poids relatifs au portefeuille ont évolué mais pas la richesse. Dans le cas d'une stratégie constant mix c'est différent (cf. tableau 2.1).

Supposons que nous ayons investi 60% dans l'action et 40% dans l'instrument monétaire. Lors de la baisse de l'action de 100\$ à 90\$, la valeur de l'action dans le portefeuille passe de 60\$ à 54\$. Son poids diminue donc à  $54/94 = 57.4\%$ . C'est le poids de l'action dans la stratégie buy-and-hold. Or dans la stratégie constant mix, nous souhaitons acheter de l'action pour revenir au poids initial de 60%. La valeur correspondante de l'action dans le portefeuille va alors être égale à  $60\% * 94\$ = 56.40\$$ . Nous vendons de manière symétrique  $56.40 - 54 = 2.40\$$  de monétaire : le portefeuille en contient alors 37.60\$.

La hausse de l'action qui va suivre dans le second temps va se révéler profitable à la stratégie constant mix qui vient d'acheter de l'action. En effet, la valeur de l'action dans le portefeuille va passer de 56.40\$ à  $56.40 * 100/90 = 62.67\$$ . La valeur du portefeuille est alors égale à  $37.60 + 62.67 = 100.27\$$ . Contrairement à la stratégie buy-and-hold, qui finit à 100\$, la stratégie constant mix a fait gagner 0.27\$. Le positionnement du gérant, *contrarian* aux évolutions du marché, s'est révélé payant, car l'achat d'action a été suivi immédiatement par une augmentation de sa valeur.

Ensuite, il est nécessaire de rebalancer à nouveau les poids, puisque les 62.67\$ de l'action dans le portefeuille représentent  $62.67/100.27 = 62.50\%$  de la richesse du portefeuille, ce qui est supérieur aux 60% fixés. Il va alors falloir vendre de l'action pour  $62.67 - 60\% * 100.27 = 2.51\$$ . Nous avons à la fin de la seconde période un portefeuille composé de 60.16\$ d'actions et  $37.60 + 2.51 = 40.11\$$  de monétaire. Dans le cas où l'action va baisser au cours de la période suivante, ce rebalancement va s'avérer à nouveau profitable.

	t=0	t=1		t=2	
Évolution Action	100	90		100	
		<i>Buy-and-hold</i>	<i>Constant mix</i>	<i>Buy-and-hold</i>	<i>Constant mix</i>
Valeur action	60	54	56.40	60	60.16
Poids action	60%	57.4%	60%	60%	60%
Valeur monétaire	40	40	37.60	40	40.11
Valeur portefeuille	100	94	94	<b>100</b>	<b>100.27</b>

TABLE 2.1 – Comparaison des stratégies constant mix et buy-and-hold

Un investisseur constant mix anticipe donc des retournements réguliers des actifs composant son portefeuille. Et lorsque le marché est flat et volatil, cette stratégie profitera fortement des retournements de marché.

Au contraire, lorsque le marché a des tendances (trends) de hausse (bull) et de baisse (bear) marquées, la stratégie buy-and-hold sera plus adéquate.

**Conseil pratique de gestion**

*Acheter et ne plus y toucher, ou alors fixer les poids et rebalancer l'allocation régulièrement ? Cette question posée au gérant peut se résoudre suivant ses anticipations : s'il pense que le marché aura une tendance importante de hausse par exemple, il sera préférable d'appliquer la stratégie buy-and-hold ; et lorsqu'il anticipera une volatilité importante avec des retournements réguliers, la stratégie constant mix sera plus profitable.*

# CONCLUSION

Ce cours de Gestion d'Actifs a essayé de proposer un premier état de l'art concernant l'allocation des actifs et ses outils quantitatifs d'aide à la décision. Nous avons pu ainsi tenter de comprendre les enjeux de la finance contemporaine et la nécessité de plus en plus grande de bien gérer l'épargne collective mondiale. Puis nous avons continué par décrire les premiers outils quantitatifs mesurant les risques de variation des actifs et les performances des investissements. Enfin, nous avons pu faire une première entrée dans la boîte noire de l'allocation optimale et des stratégies d'investissement. De nombreuses techniques quantitatives plus complexes existent néanmoins : allocation bayésienne Black-Litterman, allocation par simulations Monte Carlo, stratégies Option Based Portfolio Insurance (OBPI) et Constant Proportion Portfolio Insurance (CPPI).

Nous espérons qu'après ce cours et ses ateliers, des compétences en gestion de portefeuille auront pu être développées, pour créer efficacement un portefeuille performant tout en ne prenant pas des risques démesurés.

# BIBLIOGRAPHIE

- [1] AFTALION, F., PONCET, P. & PORTAIT, R., 1998, *La Théorie Moderne du Portefeuille*, Que sais-je ?, PUF.
- [2] AGLIETTA, M. & REBERIOUX, A., 2004, *Dérives du Capitalisme Financier*, Albin Michel.
- [3] BECK, U., 1986, *La société du Risque : Sur la Voie d'une Autre Modernité*, Flammarion, Paris.
- [4] BERLE, A. & MEANS, G., 1932, *The Modern Corporation and Private Property*, Harcourt, Brace and World, New York.
- [5] BERNSTEIN, P., 1995, *Des Idées Capitales*, PUF, Quadrige.
- [6] CARHART, M., 1997, *On Persistence in Mutual Fund Performance*, Journal of Finance, 52, 57-82.
- [7] CLAUSS, P., 2011, *Gestion de Portefeuille*, Dunod.
- [8] EFRON, B., 1995, *Le Bootstrap et ses Applications*, CISIA.
- [9] FAMA, E.F., 1998, *Market Efficiency, Long-Term Returns, and Behavioral Finance*, Journal of Financial Economics, 49, 283-306.
- [10] FAMA, E. & FRENCH, K., 1993, *Common Risk Factors in the Returns on Stocks and Bonds*, Journal of Financial Economics, 33, 3-56.
- [11] GIDDENS, A., 1991, *Les Conséquences de la Modernité*, L'Harmattan.
- [12] GRANGER, C.W.G. & NEWBOLD, P., 1974, *Spurious Regressions in Econometrics*, Journal of Econometrics, 26, 1045-1066.
- [13] GURLEY, J.G. & SHAW, E.S., 1960, *Money in a Theory of Finance*, The Brookings Institution, Washington.
- [14] HICKS, J., 1975, *Crisis in Keynesian Economics*, Basil Blackwell.
- [15] JOLLIFFE, I.T., 1986, *Principal Component Analysis*, Springer.
- [16] LARDIC, S. & MIGNON, V., 2002, *Econométrie des Séries Temporelles Macroéconomiques et Financières*, Economica.
- [17] LINTNER, J., 1965, *The Valuation of Risk Assets and the Selection of Risky Investments in Stock Portfolios and Capital Budgets*, Review of Economics and Statistics, 47, 13-37.
- [18] MARDIA, K.V., KENT, J.T. & BIBBY, J.M., 2003, *Multivariate Analysis*, Academic Press, London.
- [19] MARKOWITZ, H., 1952, *Portfolio Selection*, Journal of Finance, 7, 77-99.
- [20] MERTON, R.C., 1972, *An Analytic Derivation of the Efficient Portfolio Frontier*, Journal of Financial and Quantitative Analysis, 7, 1851-1872.
- [21] MOSSIN, J., 1966, *Equilibrium in a Capital Asset Market*, Econometrica, 34, 768-783.
- [22] PERETTI-WATEL, P., 2000, *Sociologie du Risque*, HER/Armand Colin, Paris.
- [23] PEROLD, A.F. & SHARPE, W.F., 1988, *Dynamic Strategies for Asset Allocation*, Financial Analysts Journal, 16-27.

- [24] ROSS, S., 1976, *The Arbitrage Theory of Capital Asset Pricing*, The Journal of Economic Theory, 13.
- [25] SHARPE, W., 1964, *Capital Asset Prices : a Theory of Market Equilibrium under Conditions of Risk*, Journal of Finance, 19, 425-442.