Statistique des Risques Multiples

Application à la Mesure du Risque de Crédit

Pierre Clauss

Ensai
Filière Gestion des Risques et Ingénierie Financière

Objectif de l'enseignement

Ce cours, de 2 séances de 5 heures, est composé de deux parties : l'étude théorique de la modélisation du risque de crédit et une application de la Théorie des Copules au calcul d'une CreditVaR.
Les objectifs de ce cours sont de maîtriser les techniques probabilistes de modélisation du risque de crédit, d'appliquer à une structure de dépendance financière l'objet copule, et enfin d'anticiper la situation prochaine du stage. C'est pour cela qu'une partie importante du cours est dédiée à la programmation informatique à l'aide essentiellement du logiciel R [1] et au travail sur les données financières.

1. R Development Core Team (2008). R : A language and environment for statistical computing. R Foundation for Statistical Computing, Vienna, Austria. ISBN 3-900051-07-0, URL http ://www.R-project.org.

Table des matières

Introduction

Aujourd'hui, la gestion du risque pris par les banques est devenue fondamentale. Mais un élément essentiel, qui reste à approfondir, est la mesure du risque de contagion ou risque multiple. Ce risque survient lorsqu'un portefeuille est composé de plusieurs actifs qui ont une structure de dépendance forte. Les différents risques réglementés par le Comité de Bâle sont concernés par la présence de structure de dépendance mais nous allons dans ce cours nous intéresser plus particulièrement au risque de crédit.

Alors que le risque de marché est défini comme le risque de perte lié aux variations des marchés, le risque de crédit est lié aux variations de la qualité de la signature d'un émetteur. Ainsi, un prêteur X est soumis via l'achat d'une obligation émise par Y au risque que ce dernier ne rembourse pas la capital investi à la maturité de l'obligation. Si Y ne peut pas faire face à ses engagements, cela signifie que Y a fait *défaut*. Les exemples historiques les plus marquants de défaut sont ceux d'Enron, Parmalat, et plus récemment les ménages *subprimes* américains. Tout l'enjeu de cours est de modéliser la défaillance d'un émetteur de dette plus ou moins risquée dans le but de la mesurer.
Le risque de défaillance se mesure à travers différents événements que peut subir un émetteur : l'évolution possible de sa notation ou *rating* (*upgrade* ou *downgrade*) émis par les agences de notation telles Moody's et Standard & Poor's par exemple, la modification de la cotation de l'entreprise, la variation du spread de crédit, le défaut de paiement, la faillite. Ces événements peuvent influer plus ou moins sur la qualité de la signature de l'émetteur, augmentant alors, dans le cas d'une dégradation de la signature, le risque de défaut de l'entreprise.
Outre la probabilité de défaillance, deux autres paramètres interviennent dans la mesure du risque de crédit : le taux de recouvrement (on peut aussi étudier symétriquement la perte en cas de défaut, en anglais *Loss Given Default* ou LGD) qui quantifie ce que récupère (ou perd pour la LGD) le créancier lorsque l'entreprise fait défaut, et la dépendance entre les défauts des émetteurs, qui peut être modélisée à l'aide d'une copule. Ces 3 paramètres essentiels à la modélisation du risque de crédit vont nous permettre de mesurer le risque multiple résultant de la détention d'un portefeuille de créances.

L'objet de ce cours est donc d'étudier rigoureusement les différentes méthodologies pour appréhender la probabilité de défaut ainsi que les paramètres de taux de recouvrement et de dépendance des défauts. Cela nous permettra de déterminer une mesure du risque multiple d'un portefeuille de crédit à l'aide de la CreditVaR.

CHAPITRE 1

MODÉLISATION DE LA PROBABILITÉ DE DÉFAUT

Pour modéliser le risque de crédit, un élément essentiel est la probabilité de défaut. Trois possibilités s'offrent à nous :

- l'approche par les ratings et par les évolutions en terme de notations des émetteurs : à chaque *rating* est associée une probabilité de défaut d'autant plus élevée que le *rating* est mauvais,
- l'approche *structurelle* modélisant le défaut en prenant en compte le bilan comptable de l'entreprise et le processus financier conduisant au défaut,
- et l'approche sous *forme réduite* ou encore des modèles à intensité, modélisant le défaut sans référence au processus financier sous-jacent. Le défaut est imprévisible et sa loi est gouvernée par un processus stochastique.

1.1 Approche par les ratings

Cette méthodologie s'appuie sur le constat qu'un événement de défaut est consécutif à une dégradation progressive des ratings de l'émetteur. En outre, elle fait partie des fondements des réglementations du Comité de Bâle. Deux approches sont possibles : la première élabore des notations à l'aide d'opinions d'experts et la seconde utilise les techniques de *scoring*.

1.1.1 Notation des agences

Les ratings des agences de notation sont déterminés sur la base d'opinions indépendantes, objectives, crédibles et transparentes. Cette opinion qualitative est en général présentée sous la forme d'une ou plusieurs lettres symbolisant la qualité de crédit de l'émetteur. L'ensemble de ces notations forme l'échelle de notation. Les ratings, qui s'appliquent aussi bien à l'émetteur qu'à l'instrument de dette émis, varient selon l'horizon auquel ils s'appliquent. Nous distinguons des ratings court terme (d'horizon égal ou inférieur à 1 an) et des ratings de long terme. Les agences ont des échelles différentes mais un point commun essentiel est la distinction entre les deux catégories *investment grade* et *sub-investment grade* ou *speculative grade* (cf. tableau 1.1). La première catégorie rassemble des firmes ayant une relative stabilité dans leurs modèles de développement et un niveau de risque modéré. La seconde catégorie inclut des émetteurs aux caractéristiques financières incertaines dont la probabilité de faire défaut est plus élevée.
Les ratings sont issus de la compétitivité de la firme, la qualité du management et de la politique suivie, de la situation du marché de la firme, ainsi que de ratios financiers, dépendant aussi du secteur de la société. Ils font l'objet d'un suivi régulier afin de refléter au mieux l'évolution du client.
Un point important est le fait que le rating ne reflète pas la cherté d'une dette mais le jugement sur la qualité de la signature d'une dette et sa capacité de remboursement.

	Moody's	**Stanbard & Poor's**
investment grade	Aaa	AAA
	Aa	AA
	A	A
	Baa	BBB
speculative grade	Ba	BB
	B	B
	Caa	CCC

TABLE 1.1 – Ratings de Moody's et Stanbard & Poor's

Les probabilités de défaut, en fonction de la zone géographique, du secteur, de la période, de l'horizon, correspondent à la moyenne des fréquences de défaut par rapport à l'ensemble des firmes de même rating.

Les agences de notation fournissent aussi des matrices de transition indiquant pour un horizon donné la probabilité de migration qu'un émetteur ou instrument appartenant à une classe de rating passe dans une autre classe en cours de période. Mais ces matrices sont-elles stables dans le temps et permettent-elles ainsi d'anticiper les migrations futures ?
Si c'est le cas, nous pouvons faire l'hypothèse que les matrices de transition sont markoviennes, c'est-à-dire que la seule connaissance de l'information en t permet de déterminer les valeurs de la matrice en $t+1$. Cette hypothèse est néanmoins très discutée (cf. de Servigny, Métayer et Zelenko [3] pour une revue des débats en cours).
Nous supposons que l'on dispose de 7 niveaux de rating distincts hors défaut soit 8 états pour les créances. On note l'*espace état* $I = \{AAA, AA, A, BBB, BB, B, CCC, D\}$ dénombrable et fini avec D la classe des titres en défaut. On note $P = P(0,1) = (p_{ij})_{i,j \in I \times I}$ la matrice 8×8 de transition à 1 an et nous remarquons que P a la forme suivante, avec en lignes les ratings en t et en colonnes les ratings en $t+1$:

$$P = P(0,1) = \begin{pmatrix} R & L \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

avec R un matrice de taille 7×7 de transition d'une classe de crédit à l'autre, L un vecteur 7×1 de probabilités de défaut, 0 le vecteur 1×7 de probabilités nulles de sortir de l'état de défaut, et la valeur 1 traduit l'état absorbant de défaut. P étant telle que $0 \le p_{ij} < \infty \ \forall i, j$ et $\sum_j p_{ij} = 1 \ \forall i$, la matrice de transition est qualifiée de *stochastique*.
Les probabilités de transition sont modélisées à l'aide d'un chaîne de Markov à états finis.

Définition 1 *Un processus $X = (X_n)_n$ est une chaîne de Markov homogène à états finis discrets I de matrice de transition P si on a :*

$$\mathbb{P}[X_{n+1} = j | X_0 = i_0, X_1 = i_1, \ldots, X_n = i] = \mathbb{P}[X_{n+1} = j | X_n = i] = p_{ij}$$

Propriété 1 *L'équation de Chapman-Kolmogorov implique que :*

$$P(0, m+n) = P(0, n)P(0, m)$$

ou encore :

$$P(0, n) = P(0, 1)^n = P^n = (p_{ij}^{(n)})_{i,j}$$

avec $P(0,n)$ la matrice de transition déterminée aujourd'hui pour un horizon de n années, et $p_{ij}^{(n)}$ l'élément (ij) de la matrice P^n (probabilité de passer de i à j en n années). Nous avons aussi :

$$\mathbb{P}[X_{n+m} = j | X_m = i] = p_{ij}^{(n)}$$

Les probabilités de défaut à n'importe quel horizon sont donc déterminées grâce à la modélisation de la matrice de transition par chaîne de Markov homogène.

1.1.2 *Scoring* des émetteurs

En général, les ratings des agences sont faits sur des États et entreprises de grande taille. Concernant les petites et moyennes entreprises, les probabilités de défaut peuvent être estimées à l'aide de méthodes de scoring.
Les variables explicatives, issues d'informations comptables, sont des ratios économiques et financiers statistiquement significatifs pour différencier les entreprises susceptibles d'être en difficulté de celles qui sont plus saines (performances, solvabilité, autonomie financière, etc.). Un *mapping* spécifique permet de relier le *scoring* continu et l'échelle de notation discrète.
Deux techniques principales de *scoring* sont utilisées pour calibrer la probabilité de défaillance : l'analyse discriminante linéaire de Fisher et la régression logistique. Nous avons une préférence pour la seconde technique car elle a des hypothèses moins restrictives. Nous donnons dans la suite un rappel de sa méthodologie (cf. Davidson et MacKinnon [2] et Thomas [10]).

Nous supposons que le défaut est modélisé par une variable dépendante y_i binaire, soit égale à 0 (pas de défaut), soit égale à 1 (défaut).
Considérons en premier lieu le modèle suivant :

$$y_i = x_i\beta + u_i$$

avec x_i un vecteur $(1 \times K)$ de variables explicatives pour l'individu i associées au vecteur $(K \times 1)$ de paramètres β et u_i le résidu.
L'hypothèse sous-jacente est que l'espérance conditionnelle $\mathbb{E}(y_i|x_i) = x_i\beta$ et donc la probabilité conditionnelle est une fonction linéaire des x_i.
Ce *modèle à probabilité linéaire* présente de nombreux inconvénients. La technique des Moindres Carrés Ordinaires (MCO) classique utilisée dans les modèles de régression à variable dépendante continue ne peut être appliquée.
Tout d'abord, rien ne contraint le modèle à ce que la probabilité estimée soit comprise entre 0 et 1.
Ensuite, les résidus de la régression ne peuvent prendre que 2 valeurs : $1 - x_i\beta$ avec la probabilité $x_i\beta$ et $-x_i\beta$ avec la probabilité complémentaire $1 - x_i\beta$. Le cadre d'analyse des MCO considérant les résidus continus se prête donc mal à la modélisation de y_i.
Enfin, le calcul de la variance des résidus donne :

$$\begin{aligned}
\mathbb{V}(u_i) &= (u_i^2|y_i = 1) * \mathbb{P}(y_i = 1) + (u_i^2|y_i = 0) * \mathbb{P}(y_i = 0) \\
&= (1 - x_i\beta)^2 * (x_i\beta) + (-x_i\beta)^2 * (1 - x_i\beta) \\
&= x_i\beta(1 - x_i\beta)
\end{aligned}$$

Le modèle est donc hétéroscédastique par construction, la variance des résidus dépendant des x_i et n'étant donc pas constante.

Il est donc nécessaire d'utiliser une technique alternative et pour cela nous allons introduire une variable latente y_i^* (inobservable) telle que :

$$\begin{cases} y_i = 1 & \text{si } y_i^* > c \\ y_i = 0 & \text{si } y_i^* \leq c \end{cases}$$

où $y_i^* = x_i\beta + u_i$ et c correspond à la valeur seuil que nous normalisons à 0.
Nous considérons alors la réalisation de la variable dépendante binaire comme provenant d'une règle de décision s'écrivant :

$$\begin{cases} \mathbb{P}(y_i = 1) = \mathbb{P}(u_i > -x_i\beta) = 1 - F(-x_i\beta) = F(x_i\beta) \\ \mathbb{P}(y_i = 0) = \mathbb{P}(u_i \leq -x_i\beta) = F(-x_i\beta) = 1 - F(x_i\beta) \end{cases}$$

avec F une fonction de répartition symétrique autour de 0.

Il faut bien remarquer que dans la modélisation de la variable binaire, nous ne modélisons plus la variable en elle-même, mais les probabilités de réalisation des événements $\{y_i = 1\}$ et $\{y_i = 0\}$.
Il nous faut définir F la fonction de répartition des résidus. Classiquement, nous avons le choix entre la loi logistique (modèle Logit), la loi normale (modèle Probit) et la loi de Gompertz, non symétrique (modèle Gompit). Nous ne verrons ici que le cas de la loi logistique, plus facile à manipuler, qui a pour fonction de répartition Λ :

$$\Lambda(x_i\beta) = \frac{\exp(x_i\beta)}{1+\exp(x_i\beta)}$$

Nous estimons le modèle par maximum de vraisemblance. La vraisemblance s'écrit :

$$\mathcal{L}(y, x\,;\,\beta) = \prod_{i=1}^{n} \left[\frac{1}{1+\exp(x_i\beta)}\right]^{1-y_i} \left[\frac{\exp(x_i\beta)}{1+\exp(x_i\beta)}\right]^{y_i}$$

avec un échantillon de n individus. Et la log-vraisemblance a pour expression :

$$\log \mathcal{L} = -\sum_{i=1}^{n} [\log[1+\exp(x_i\beta)] - y_i x_i \beta]$$

Propriété 2 *Nous obtenons alors les estimations des probabilités, en notant p_i la probabilité que $\{y_i = 1\}$ (apparition d'un défaut) :*

$$\hat{p}_i = \frac{\exp(x_i\hat{\beta})}{1+\exp(x_i\hat{\beta})}$$

La probabilité de l'événement $\{y_i = 0\}$ est la probabilité complémentaire.

Précisons que les valeurs des paramètres estimés $\hat{\beta}$ n'ont pas d'intérêt en soi ; seul leur signe est une information utilisable : en effet, il indique si la variable associée influence la probabilité à la hausse ou à la baisse.

1.2 Modèle de Merton

De manière complémentaire à l'approche par les ratings, le recours aux modèles structurels (dont Merton est à l'origine) de valorisation de la firme a permis, à l'aide de nombreuses approximations empiriques, de dégager une estimation de la probabilité de défaut des entreprises cotées. L'approche structurelle a été initiée par Merton [8] en 1974. Elle est fondée sur la modélisation de l'évolution du bilan, économique et non comptable, de l'entreprise. Le défaut intervient alors si l'émetteur de la dette est dans l'impossibilité d'honorer ses engagements. Le risque de défaut est modélisé en utilisant les principes de *pricing* des options dans le cadre de Black et Scholes. Cette modélisation est largement utilisée par les praticiens (cf. l'entreprise Moody's KMV ou encore JP Morgan avec le modèle *Credit Grades* par exemple).

1.2.1 Modélisation de la firme

L'hypothèse fondamentale est la modélisation de la dynamique de la valeur de la firme V par un mouvement Brownien géométrique :

$$dV_t = V_t(\mu dt + \sigma dW_t) \tag{1.1}$$

avec μ et σ les paramètres de tendance et de diffusion constants, et W_t un mouvement Brownien standard.

En outre, la valeur de la firme V_t en t (l'actif du bilan de la firme) apparaît comme la somme de la valeur actionnariale de la firme E_t et de la valeur de la dette D_t (somme représentant le passif du bilan) : ainsi, l'actif étant égal au passif, $V_t = E_t + D_t$. La valeur actionnariale est sous la forme d'actions et la dette sous la forme d'un zéro-coupon de maturité T et de nominal L. A maturité, il y a défaut si la valeur de la firme V_T est inférieure à la dette L que la firme doit payer aux créanciers. Ainsi, les détenteurs d'obligations reçoivent $\min(V_T, L)$ et le reliquat est versé aux actionnaires : $\max(V_T - L, 0)$. Nous reconnaissons pour ce dernier versement le payoff d'un call européen. Le revenu des actionnaires s'assimile donc à celui d'une option d'achat d'échéance T et de prix d'exercice L (le remboursement du zéro-coupon à maturité).
Étudions plus en détail le payoff de la dette $\min(V_T, L)$. Il est égal aussi à :

$$\min(V_T, L) = L - \max(L - V_T, 0)$$

La dette risquée se confond donc avec une dette sans risque (de même maturité T et de même nominal L) à laquelle on retranche un put (option de vente) appelée *put-to-default* écrit sur la valeur de l'entreprise.

Exercice 1 *Sous les hypothèses classiques de la théorie des options dans le cadre de Black et Scholes, écrire D_t sous la probabilité risque-neutre $\mathbb{Q}$, en notant P_t (respectivement C_t) le prix du put (call) sur la valeur de la firme V_t de prix d'exercice L et de maturité T.*
Indication : utiliser la formule de parité call-put : $C_t - P_t = V_t - Le^{-r(T-t)}$.

1.2.2 Probabilité de défaut

La solution de l'équation différentielle stochastique (1.1) est sous la probabilité risque-neutre $\mathbb{Q}$:

$$V_t = V_0 \exp\left[\left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)t + \sigma\bar{W}_t\right]$$

où $\bar{W}_t \sim \mathcal{N}\left(0, \sqrt{t}\right)$.

Exercice 2 *La probabilité de défaillance, noté P^D, est définie de la manière suivante sous la probabilité risque-neutre $P^D = \mathbb{Q}\left[V_T \leq L\right]$. Calculer cette probabilité de défaut P^D en t.*

1.2.3 Calibration

Tout d'abord, le paramètre L peut être estimé à partir de l'évaluation de la dette de l'entreprise. Il se pose néanmoins des problèmes pour l'estimation des paramètres V_t et σ qui ne sont pas directement observables. Ils peuvent être estimés à partir des données historiques de la valeur de l'action E_t.
La valeur de l'action (call sur la valeur de la firme) est donnée par :

$$E_t = f(t, V_t) = V_t\Phi(d_1) - Le^{-r(T-t)}\Phi(d_0) \tag{1.2}$$

Supposons que le processus E_t suit une EDS d'Itô de la forme $dE_t = E_t[\bar{\mu}_E dt + \sigma_E d\bar{W}_t]$ sous $\mathbb{Q}$.

Exercice 3 *Déterminer la volatilité σ_E du processus E_t en fonction de la volatilité du processus de la valeur de l'entreprise V_t.*
Indication : utiliser le lemme d'Itô.

Nous avons présenté les différents enjeux sous-jacents à la modélisation structurelle de Merton (cf. aussi Haworth [6]). Néanmoins, ce modèle présente des limites dont la principale est le fait que le défaut de l'émetteur ne peut intervenir qu'à la maturité de la dette. Les modèles de premier instant de passage résolvent ce problème. Nous ne développerons pas cette modélisation dans le cadre de ce cours (cf. la description du modèle de *Credit Grades* [4] par exemple comme application possible).

1.3 Modèle à intensité constante

Une autre limite des modèles structurels est la caractère prédictif du moment de défaut. Une solution est de considérer l'événement de défaut comme totalement exogène. Nous modélisons et estimons alors directement la probabilité de défaut. Les modèles à intensité ou *reduced form* dissocient de manière explicite défaut et valeur de la firme, au contraire des modèles structurels. La date de défaut ressort d'un processus exogène et ne dépend pas explicitement des actifs de la firme. Cette modélisation permet de rendre compte des ruptures : le défaut survient lorsqu'un saut discret aléatoire apparaît (cf. Kurtz et Pignard [7] pour plus de précisions sur la modélisation des modèles à forme réduite). Nous nous contentons d'étudier dans ce cours le cas d'une intensité constante.

1.3.1 Probabilité de défaut

Définition 2 *Soit τ le temps de défaut. Nous définissons la probabilité de défaut instantanée comme l'intensité de défaut λ (ou taux de hasard) sur un intervalle $(t, t+h]$ sachant qu'il n'y a pas eu de défaut auparavant :*

$$\lim_{h \to 0} \frac{1}{h} \mathbb{P}[\tau \in (t, t+h] \mid \tau > t] = \lambda \tag{1.3}$$

Cette formulation revient à dire que τ est le premier instant de saut d'un processus de Poisson d'intensité λ.

Définition 3 *Un processus de Poisson standard $N = (N_t)_t$ est un processus de comptage*[1] *défini par le fait que :*

1. *les durées entre 2 dates t_{i-1} et t_i sont iid et distribuées selon une loi exponentielle de paramètre λ,*
2. *de façon équivalente les variations disjointes de N sont indépendantes et distribuées pour $N_t - N_s$ selon une loi de Poisson de paramètre $\lambda(t-s)$ pour $s < t$:*

$$\mathbb{P}[N_t - N_s = k] = \frac{1}{k!}[\lambda(t-s)]^k e^{-\lambda(t-s)}$$

La probabilité d'un saut sur un instant Δt est défini par :

$$\frac{1}{\Delta t} \mathbb{P}[N_{t+\Delta t} - N_t = 1] = \lambda e^{-\lambda \Delta t} \to \lambda \quad \text{pour } \Delta t \to 0$$

Nous retrouvons donc bien la formulation de l'intensité de défaut (1.3) avec le processus de défaut N défini par $N_t = \mathbb{1}_{\tau \leq t}$. En effet, le défaut est le premier saut du processus de Poisson.

Exercice 4 *Déterminer l'expression de la probabilité de défaut en T en fonction de l'intensité de défaut.*

1. Un processus de comptage est déterminé par le fait que N_t vaut 1 si l'événement *compté* est apparu, 0 sinon. Ici le processus *compte* l'événement de défaut qui est un état absorbant : lorsqu'il apparaît, le comptage est donc stoppé.

1.3.2 Évaluation d'une obligation risquée

Une obligation zéro-coupon risquée de maturité T, c'est-à-dire dont le détenteur ne reçoit rien en cas de défaut, a une valeur D_t en t sous la probabilité risque-neutre $\mathbb{Q}$ [2] :

$$D_t = \mathbb{1}_{t<\tau}\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[e^{-r(T-t)}\mathbb{1}_{T<\tau} \mid \mathcal{F}_t]$$

Exercice 5 *Donner la valorisation d'une obligation risquée en* 0*, en notant* $\bar{\lambda}$ *l'intensité de défaut sous la probabilité risque-neutre.*

Il est important de remarquer que cette intensité joue le rôle d'une rémunération supplémentaire : elle est assimilable à une prime de risque. Dans le cas d'une obligation zéro-coupon sans risque de défaut, nous avons $\bar{\lambda} = 0$. L'incertitude s'accroissant, la rentabilité exigée est plus importante. Nous pouvons calibrer ainsi les intensités à partir de la structure par terme des spreads de crédit (équivalent à la différence entre le taux de l'obligation risquée et le taux sans risque).

Nous avons supposé le taux de recouvrement nul. Nous allons développer les formules de *pricing* des zéro-coupon avec un taux de recouvrement constant mais non nul. Nous nous intéresserons par la suite à l'estimation du taux de recouvrement de manière plus précise.

L'hypothèse de recouvrement la plus courante s'appelle *fractional recovery of par value* et consiste en le recouvrement à la maturité T [3] d'une fraction δ du nominal du titre. Nous avons la valeur D_t de l'obligation suivante :

$$\begin{aligned} D_t^\delta &= \mathbb{1}_{t<\tau}\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}\left[e^{-r(T-t)}\mathbb{1}_{T<\tau} + \delta e^{-r(T-t)}\mathbb{1}_{\tau\leq T} \mid \mathcal{F}_t\right] \\ &= D_t + \mathbb{1}_{t<\tau}\delta e^{-r(T-t)}\mathbb{Q}[\tau \leq T \mid \mathcal{F}_t] \end{aligned}$$

Exercice 6 *Donner la valorisation d'une obligation risquée en* 0 *avec un taux de recouvrement* δ*.*

1.3.3 Évaluation d'un CDS

Le modèle à intensité constante permet de valoriser le plus simple des produits dérivés de crédit et qui doit être considéré comme l'élément de base de produits plus exotiques : le Credit Default Swap ou CDS (cf. Braouézec et Brun [1] pour plus de précisions sur les produits dérivés de crédit).

C'est un contrat financier conclu de gré à gré, pour une durée et un montant (notionnel) déterminés, et référencé sur un emprunteur bien défini. Dans ce contrat, l'acheteur de protection paie périodiquement lors de N dates une prime s (appelée aussi spread ou marge) tandis que le vendeur de protection s'engage à payer, en cas de défaut de l'emprunteur de référence, un montant compensant la perte résultant du défaut à hauteur du montant notionnel. Le CDS permet ainsi le transfert de risque de crédit. La protection est valable jusqu'à la maturité du swap T.

Un raisonnement simple d'absence d'opportunité d'arbitrage permet d'approximer la marge d'un CDS par le spread d'une obligation à taux variable de même maturité, ayant les mêmes dates de tombée de coupons et émise par l'emprunteur de référence du CDS.

Mais il est possible d'évaluer aussi cette marge plus précisément à l'aide des hypothèses du modèle à intensité constante. L'objectif est alors de calculer la marge s^* du CDS en 0 qui s'obtient en égalisant les jambes fixe, correspondant aux flux payés par l'acheteur de protection tant qu'il n'y a pas de défaut, et variable, correspondant au flux payé par le vendeur de protection en cas de défaut.

En considérant que la prime est payée jusqu'au défaut, la valeur de la jambe fixe $JF(s)$ est définie comme

2. Les prix actualisés sont alors des martingales.
3. Nous n'étudions pas la formule d'évaluation pour un recouvrement à l'instant de défaut mais à la maturité.

l'espérance actualisée du payoff sous la probabilité risque-neutre :

$$\begin{aligned}
JF(s) &= \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}\left[\sum_{i=0}^{N-1} s(t_{i+1}-t_i)e^{-rt_{i+1}}\mathbb{1}_{\tau>t_{i+1}}\right] \\
&= s\sum_{i=0}^{N-1}(t_{i+1}-t_i)e^{-rt_{i+1}}\mathbb{Q}\left[\tau>t_{i+1}\right] \\
&= s\sum_{i=0}^{N-1}(t_{i+1}-t_i)e^{-(r+\bar{\lambda})t_{i+1}} \quad \text{car } \tau \text{ suit une loi exponentielle de fonction de survie } S(u)=e^{-\bar{\lambda}u} \\
&\approx s\int_0^T e^{-(r+\bar{\lambda})u}du \quad \text{par approximation d'une intégrale par les sommes de Riemann} \\
&= s\frac{1-e^{-(r+\bar{\lambda})T}}{r+\bar{\lambda}}
\end{aligned}$$

En supposant que le flux variable est payé à l'instant τ d'occurrence du défaut, la valeur de la jambe variable JV s'écrit sous la probabilité risque-neutre :

$$\begin{aligned}
JV &= \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}\left[(1-\delta)e^{-r\tau}\mathbb{1}_{\tau\leq T}\right] \\
&= (1-\delta)\int_0^T e^{-ru}\bar{\lambda}e^{-\bar{\lambda}u}du \quad \text{car } \tau \text{ suit une loi exponentielle de densité } f(u)=\bar{\lambda}e^{-\bar{\lambda}u} \\
&= (1-\delta)\bar{\lambda}\int_0^T e^{-(r+\bar{\lambda})u}du \\
&= (1-\delta)\bar{\lambda}\frac{1-e^{-(r+\bar{\lambda})T}}{r+\bar{\lambda}}
\end{aligned}$$

Le *fair* spread s^* est tel que $JF(s^*)=JV$. Nous obtenons alors l'égalité suivante, que nous appelons le *triangle du crédit* :

$$s^*=(1-\delta)\bar{\lambda}$$

Les CDS (plus précisément les CDS senior) étant assez liquides, nous pouvons extraire l'intensité de défaut implicite au *pricing* des CDS pour estimer une probabilité de défaut implicite relativement juste, pour l'émetteur sous-jacent et pour une maturité donnée.

Exercice 7 *A partir des spreads de CDS de 2 entreprises pour différentes maturités, extraire les probabilités de défaut implicites. Supposer que les CDS ont été évalués avec un taux de recouvrement égal à* 40%.

Les prolongements du modèle à intensité définissent non plus l'intensité constante (qui a pour conséquence la génération de structures par terme *plates* des primes de CDS) mais avec des formes plus complexes (intensité constante par morceaux, polynomiale, stochastique, etc.). Les structures par terme générées seront alors plus proches de la réalité des marchés.

CHAPITRE 2

MODÉLISATION DU TAUX DE RECOUVREMENT

Les taux de recouvrement, ou de récupération, sont influencés par de nombreux facteurs qui peuvent être propres à la structure de l'entreprise ou découlant d'un état de l'activité économique ou encore d'une juridiction plus ou moins favorable aux créanciers.
Dans ce chapitre, nous étudions le taux de recouvrement mais ceci est similaire bien entendu à l'étude de la LGD (Loss Given Default) car le taux de recouvrement est égal à $1-\text{LGD}$ (avec la LGD exprimée en pourcentage).

2.1 Mesure du taux de recouvrement

Il existe principalement deux mesures retenues pour estimer le taux de recouvrement :
- déduite du prix du titre de dette juste après que celui-ci a connu une situation de défaut : le *trading price recovery*,
- déduite de la valeur actualisée des actifs venant en compensation du défaut du titre de dette : l'*ultimate recovery* (valeur liée à la revente ou à la liquidation du fonds de commerce et des actifs).

La première de ces mesures présente l'inconvénient de ne pas pouvoir systématiquement être évaluée lorsqu'il n'existe pas de marché permettant de fournir un tel prix. Pour autant, lorsque cette mesure peut être appliquée, elle présente l'avantage de fournir une mesure du taux de recouvrement juste après l'événement de défaut.
La seconde mesure présente l'inconvénient d'être parfois complexe à déterminer, en particulier lorsque les actifs venant en garantie sont illiquides. En outre, le délai moyen séparant le défaut de la récupération est estimé à 2 ans et demi (aux États-Unis) : ceci soulève donc le problème de la détermination d'un taux d'actualisation approprié.

Il existe six facteurs principaux explicatifs du processus de recouvrement :

1. La séniorité de l'instrument, qui attribue des priorités dans le remboursement à travers des clauses à l'émission (une obligation *senior* sera remboursée avant une obligation *junior* appelée aussi *subordonnée*).
2. Le secteur industriel. Le remboursement dépend largement de la valeur des actifs venant en garantie du défaut. Or la valeur de ces actifs dépend du secteur industriel auquel l'émetteur est attaché : un secteur où les actifs immatériels sont importants aura un taux de recouvrement plus faible que ceux dans lesquels ils seront moins présents.
3. Le cycle d'activité économique : une dépendance importante est révélée empiriquement entre le cycle économique, ainsi que les taux d'intérêt, et le taux de recouvrement.

4. Les sûretés, qui sont le nom donné aux actifs venant en garantie. Elles consistent le plus souvent en un portefeuille d'actifs gérés dynamiquement. En période de récession, la valeur de la sûreté aura tendance à décroître et la probabilité de défaut à augmenter.
5. Le système de juridiction. Lorsqu'il y a défaut, le niveau de recouvrement est déterminé par un juge. Les différences de juridiction entre les pays est essentielle pour déterminer le taux de recouvrement, ainsi que les périodes de temps nécessaires au recouvrement (18 mois à 10 ans en France, 18 mois à 3 ans aux États-Unis).
6. La capacité de négociation des investisseurs. Les droits de contrôle des créanciers sur l'entreprise sont prédéfinis dans le contrat. En outre, plus la part de l'investissement est importante, plus la capacité de négociation est forte pour le créancier.

Après avoir étudié la définition, ainsi que les tenants et les aboutissants du taux de récupération, nous allons pouvoir le modéliser judicieusement.

2.2 Modélisation stochastique et calibration

Nous avons précédemment introduit un taux de recouvrement constant dans les modèles à intensité et l'évaluation d'obligation risquée. Ici, nous modélisons le taux de recouvrement en le supposant aléatoire.
Il est fréquent de supposer que les taux de récupération sont distribués selon une loi Bêta. C'est une distribution à support $[0, 1]$ qui dépend de 2 paramètres a et b. L'expression de sa fonction de densité est :

$$f(x) = \frac{1}{\beta(a, b)} x^{a-1}(1-x)^{b-1}\mathbb{1}_{[0,1]}(x)$$

avec $\beta(a, b) = \int_0^1 x^{a-1}(1-x)^{b-1}dx$. La moyenne μ et la variance σ sont égales à :

$$\mu = \frac{a}{a+b}$$

$$\sigma = \frac{ab}{(a+b)^2(a+b-1)}$$

Cette distribution est très flexible et permet de modéliser plusieurs formes de distribution. Ainsi, par exemple :
- si $a = b = 1$, nous obtenons la distribution uniforme,
- si $a = b$, nous avons une distribution symétrique par rapport à $x = 1/2$; si les paramètres sont supérieurs à 1, la courbe est en cloche, alors qu'elle a la forme d'un U s'ils sont inférieurs à 1,
- si $a > b$, la courbe est asymétrique à droite (skewness négatif), etc.

De nombreuses études fournissent le taux de recouvrement moyen $\hat{\mu}$ et la volatilité du taux $\hat{\sigma}$. Elles permettent de calibrer les paramètres a et b de la manière suivante :

$$\hat{a} = \frac{\hat{\mu}^2(1-\hat{\mu})}{\hat{\sigma}^2} - \hat{\mu}$$

$$\hat{b} = \frac{\hat{\mu}^2(1-\hat{\mu})^2}{\hat{\mu}\hat{\sigma}^2} - (1-\hat{\mu})$$

La modélisation du taux de recouvrement ne doit pas être négligée. En effet, son impact sur la modélisation du risque de crédit peut apparaître dans certains cas plus important que celui de la probabilité de défaut.

CHAPITRE 3

MODÉLISATION DE LA DÉPENDANCE DES DÉFAUTS

Enfin, le dernier paramètre à considérer dans la mesure du risque de crédit est la dépendance entre les différents actifs d'un portefeuille de créances. Ce que l'on doit modéliser est plus précisément les dépendances entre les défaillances potentielles. Ceci permettra d'évaluer le risque de contagion ou risque multiple contenu dans un portefeuille de crédit. Pour cela, il nous faut tout d'abord déterminer des observations sur la structure de dépendances des défauts.

3.1 Mesurer la dépendance des événements de défaut

Les dépendances de défaillance ont la particularité de ne pas être en général observables directement. Néanmoins, les modèles structurels et à intensité vont nous permettre d'extraire une structure de dépendance approchée.

3.1.1 Dépendance à partir du modèle de Merton

Rappelons qu'à partir du modèle de Merton (cf. section 1.2), la valeur de la firme peut être décomposée comme une somme de la part action et de la part dette : Firme $=$ Action $+$ Dette. Pour déterminer une structure de dépendance des défauts, nous allons faire l'hypothèse de l'équivalence entre le niveau de dépendance obtenu entre les rentabilités des actions et celui obtenu entre les rentabilités des firmes. La structure de dépendance entre les actions est facile à déterminer. Cette méthode d'extraction de la structure de dépendance des défaillances aura notre préférence malgré son approximation.

3.1.2 Dépendance à partir du modèle à intensité constante

Les dépendances de défaut peuvent être extraites à partir du modèle à intensité étudiée en section 1.3. En effet, nous avons vu que l'intensité de défaut peut être approchée par le spread de crédit. Nous pouvons alors approcher la dépendance des défauts par celle des spreads. Néanmoins, cela sera peu précis puisque la notion de spread recouvre à la fois la probabilité de défaut et le taux de recouvrement, difficiles à distinguer, et que le risque de liquidité influence aussi les spreads en plus du risque de défaut.

3.2 Copules et dépendance des défauts

Maintenant que les données sur la structure de dépendance sont construites, il reste à modéliser cette dépendance. Un point essentiel est la nature des défauts. En effet, les événements de défaut sont des événements rares : il est donc nécessaire de pouvoir capter la dépendance extrême entre ces événements, ce qui n'est pas fait par la corrélation linéaire par exemple. Ceci peut être fait seulement par certaines copules ayant un indicateur de dépendance de queue à gauche non nul (cf. cours de **Théorie des Copules**).
Les copules vont donc nous permettre de modéliser de manière robuste la structure de dépendance des défauts.

CHAPITRE 4

CREDITVAR

Nous avons étudié dans les sections précédentes les éléments fondamentaux à la modélisation du risque de crédit. Les probabilité de défaut, taux de recouvrement et dépendance de défaut vont permettre de mesurer le risque de crédit d'un portefeuille de créances. Pour cela, nous devons maintenant définir une mesure synthétique du risque pour capturer le risque de perte. Nous allons déterminer alors une Value-at-Risk spécifique au risque de crédit, appelée la CreditVaR.

Il nous faut tout d'abord caractériser la fonction de perte L d'un portefeuille de crédit pour un horizon donné. Supposons que le portefeuille porte sur I contreparties ou firmes, qui n'ont qu'une seule créance chacune *in fine*. Le temps de défaut de la firme i est noté τ_i, le taux de recouvrement δ_i et le notionnel x_i. Nous n'intégrons pas, par souci de simplification, le facteur d'actualisation des flux. Nous avons la fonction de pertes du portefeuille de créances égale au temps t à :

$$L_t = \sum_{i=1}^{I} L_t^i = \sum_{i=1}^{I} x_i (1 - \delta_i) \mathbb{1}_{\tau_i \leq t}$$

avec L^i la fonction de perte associée à la contrepartie i.

Nous utilisons les modélisations aléatoires étudiées précédemment des probabilités de défaut, des taux de recouvrement et des dépendances des I pertes pour simuler les pertes du portefeuille.

La CreditVaR est alors définie comme le quantile de probabilité α (égale par exemple à 99%) de la fonction de perte L_t :

$$\text{CreditVaR}(\alpha) = \inf\{L : \mathbb{P}[L_t \leq L] \geq \alpha\}$$

Nous l'obtenons à partir de simulations Monte Carlo de la distribution de perte du portefeuille de crédit. Nous simulons alors N pertes L_t, comme somme des pertes sur chaque créance, et nous déterminons le quantile de probabilité α sur ces N pertes.

Exercice 8 *Vous disposez de 2 créances, issues du même secteur, de même notionnel* 1000 *EUR et de même maturité 4 ans. La première est une obligation senior de taux de recouvrement de moyenne* 60% *et de volatilité* 15%*, et la seconde est une obligation junior (ou encore subordonnée) de taux de recouvrement* 30% *et de volatilité* 25% *; il n'y a pas de dépendance entre les 2 taux de recouvrement. Déterminer la CreditVaR à* 99% *par simulations Monte Carlo, en modélisant le plus précisément possible la structure de dépendance entre ces 2 créances.*

Précisons que cet exercice est à but strictement pédagogique. Dans la réalité, un portefeuille de crédit est exposé à de nombreuses créances permettant une meilleure diversification. Dans le cas étudié ici, le portefeuille est composé de 2 créances du même secteur : le risque de perte sera en conséquence relativement important.

CONCLUSION

Ce cours a développé une introduction à la mesure du risque de crédit en étudiant précisément les probabilité de défaut, taux de recouvrement et structure de dépendance des défauts.
L'utilisation des copules pour modéliser le risque multiple des défaillances des émetteurs de créances prend alors dans ce cadre tout son sens. En effet, la dépendance des défauts, qui sont des événements rares, ne peut être captée qu'à l'aide de certaines copules adéquates, et non de la simple corrélation linéaire.

BIBLIOGRAPHIE

[1] BRAOUEZEC, Y. & BRUN, J., 2007, *Dérivés de Crédit Vanille et Exotiques*, Revue Banque Édition.

[2] DAVIDSON, R. & MACKINNON, J.G., 1993, *Estimation and Inference in Econometrics*, Oxford University Press.

[3] DE SERVIGNY, A., METAYER, B. & ZELENKO, I., 2006, *Le risque de Crédit*, Dunod.

[4] FINGER, C., 2002, *Credit Grades : Technical Document*, RiskMetrics Group.

[5] GENEST, Ch. & BOIES, J.C., 2003, *Detecting Dependance with Kendall Plots*, American Statistical Association.

[6] HAWORTH, H., 2004, *Structural Models of Default*, University of Oxford.

[7] KURTZ, D. & PIGNARD, T., 2004, *Modélisation du Risque de Crédit*, Groupe de Recherche Opérationnelle, Crédit Lyonnais.

[8] MERTON, R.C., 1974, *On the Pricing of Corporate Debt : the Risk Structure of Interest Rates*, Journal of Finance, 29, 449-470.

[9] RONCALLI, T., 2004, *La Gestion des Risques Financiers*, Economica.

[10] THOMAS, A., 2000, *Économétrie des Variables Qualitatives*, Dunod.