

# **GESTION DE PORTEFEUILLE**

**UNE APPROCHE QUANTITATIVE**

---

Pierre Clauss

ESSEC - Filière Finance  
Cnam - Master 2 Gestion de Capitaux

## OBJECTIF DE L'ENSEIGNEMENT

---

Ce cours de 25h est composé de 10 séances de 2h30 dont 4 séances de cours magistral, 5 séances d'atelier sur des projets en groupe, et pour finir 1 séance de bilan des projets et d'évaluation via un quiz.

Ce cours de Gestion de Portefeuille a pour objectif de donner les clés pour comprendre et assimiler les outils quantitatifs d'aide à la gestion de portefeuille. Pour cela, 5 projets seront proposés pour des groupes de 4 étudiants appliquant pour la majorité des techniques quantitatives sur des données réelles à l'aide du logiciel Excel et de la programmation en Visual Basic for Applications (VBA). Le but est donc très opérationnel et permettra aux étudiants d'horizons divers (Essec, Cnam) de postuler à des métiers de gérants de fonds, analystes produits, sales en Asset Management mais aussi dans les Banques de Financement et d'Investissement.

L'aspect quantitatif est essentiel aujourd'hui en finance de marché. Ce cours présentera les fondements pour gérer un portefeuille à l'aide de modèles quantitatifs mais n'aura pas la prétention de former des ingénieurs quantitatifs. Néanmoins, les connaissances développées pendant ce cours permettront d'utiliser certaines de leurs techniques pour gérer les actifs financiers plus efficacement.

# TABLE DES MATIÈRES

<b>INTRODUCTION</b>	<b>4</b>
<b>1 RISQUES FINANCIERS ET PERFORMANCE D'INVESTISSEMENT</b>	<b>5</b>
1.1 Capitalisme financier	5
1.1.1 Évolution dans les années 70	6
1.1.2 La culture du risque dans nos sociétés contemporaines	10
1.2 Mesurer les risques financiers	13
1.2.1 Évaluation d'une action	13
1.2.2 Modèles à facteurs de risque	17
1.2.3 Mesure synthétique du risque	23
1.3 Mesurer la performance d'investissement	30
1.3.1 Une première mesure synthétique	30
1.3.2 Mesures de rentabilité ajustée du risque	33
<b>2 ALLOCATION</b>	<b>35</b>
2.1 Allocation efficiente de Markowitz	35
2.1.1 Critères de rentabilité et de risque pour la sélection d'un portefeuille	35
2.1.2 Principe de la diversification	36
2.1.3 Construction d'un portefeuille optimal	36
2.2 Allocation tactique Black-Litterman	43
2.2.1 Principe général	43
2.2.2 Mise en place pratique	44
2.3 Allocation d'un portefeuille par simulations Monte Carlo	45
2.3.1 Principe de l'allocation Monte Carlo	45
2.3.2 Modélisations probabilistes	45
<b>3 STRATÉGIES D'INVESTISSEMENT</b>	<b>52</b>
3.1 Stratégies buy-and-hold et constant mix	52
3.1.1 Stratégies buy-and-hold	52
3.1.2 Stratégies constant mix	53
3.2 Stratégies de couverture du risque	55
3.2.1 Produits dérivés	55
3.2.2 Couverture en delta statique	60
3.2.3 Assurance de portefeuille	60
3.3 Stratégies de création de performance	65
3.3.1 Stratégies actions	66
3.3.2 Stratégies sur d'autres classes d'actifs	67
3.3.3 Hedge funds	67
<b>CONCLUSION</b>	<b>71</b>

# INTRODUCTION

Ce cours de Gestion de Portefeuille s'adresse à des étudiants ayant des backgrounds quantitatifs diversifiés. Pour intéresser autant les étudiants ayant des connaissances basiques en statistiques que ceux ayant une formation en mathématiques poussée, nous avons pris le parti de développer un cours faisant appel bien entendu à la théorie mais sacrifiant ses hypothèses scientifiques rigoureuses, pour gagner, nous l'espérons, en intuition pratique.

Le plan du cours reflète aussi cette exigence. Nous allons ainsi commencer par des réflexions globales sur la gestion de l'épargne financière et la finance contemporaine pour en comprendre les enjeux, pour terminer par ouvrir la boîte noire des problématiques du gérant pour créer son portefeuille. Ce cheminement ne suivra pas toujours la chronologie des découvertes de la recherche scientifique : par exemple, nous expliciterons le Capital Asset Pricing Model (CAPM) avant les découvertes de Markowitz posant les bases du CAPM.

Le cours sera composé de 3 parties.

La première tentera de faire acquérir les fondements à l'évaluation du risque et de la performance des portefeuilles gérés. A la fin de cette partie, il sera possible de gérer un portefeuille, d'actions plus spécifiquement, à l'aide d'outils simples mais très fortement utilisés en pratique. Outre cette première mise en pratique, nous initierons la première partie en développant succinctement les enjeux de la finance moderne et l'intérêt toujours grandissant pour gérer efficacement les actifs financiers.

Après avoir compris comment évaluer un portefeuille, il va falloir étudier la manière dont on le crée. Tout d'abord, il sera nécessaire de déterminer comment on alloue notre investissement aux différentes classes d'actifs à notre disposition. La deuxième partie exposera rigoureusement certaines méthodes quantitatives pour allouer une richesse de manière efficiente. Trois méthodes seront présentées : l'allocation originelle de Markowitz, l'allocation de Black et Litterman et l'allocation par simulations Monte Carlo.

Après avoir défini une allocation optimale, il faudra réfléchir à la stratégie financière que le gérant pourra développer, à savoir si l'investisseur souhaite couvrir le risque pris ou au contraire faire le plus de performance possible. Nous introduirons les techniques d'assurance de portefeuille ainsi que de création de performance via des stratégies quantitatives dans la troisième et dernière partie.

Enfin, la plupart des sections donnera lieu à un conseil pratique de gestion de portefeuille.

# CHAPITRE 1

## RISQUES FINANCIERS ET PERFORMANCE D'INVESTISSEMENT

### 1.1 Capitalisme financier

Cette première section présente les évolutions du capitalisme financier depuis les années 70 à partir de trois axes principaux : l'instabilité des marchés et l'utilisation de produits dérivés ; l'apparition des investisseurs institutionnels et d'importants montants d'épargne collective à gérer ; et le développement d'une culture du risque dans toutes les sphères de notre société, et en particulier la sphère financière.

Nous entendons par capitalisme financier l'évolution du capitalisme dans nos sociétés actuelles et dont Aglietta et Rebérioux [2] précisent les dérives. Depuis le milieu des années 70, nombreux s'accordent à dire que les marchés financiers ont fortement évolué avec une liquidité de plus en plus abondante et des marchés de plus en plus englobants, ainsi que l'apparition de fonds d'investissement dont le pouvoir financier n'a cessé de croître. La financiarisation actuelle de l'économie a de grandes conséquences sur la société elle-même.

Avant d'en décrire les grandes lignes, explicitons succinctement la définition classique d'un marché financier : on considère souvent les marchés financiers comme le lieu de rencontre entre capacités de financement et besoins de financement. Traditionnellement, on réduit ce lien à celui liant épargne et investissement. En effet, si les agents économiques assuraient entièrement leurs besoins de financement à l'aide de leurs ressources propres, les marchés financiers n'auraient aucune utilité.

Voici un point de vue paru dans Ouest France le 17 octobre 2008.

#### **"Bon" et "mauvais" capitalisme**

Nicolas Sarkozy s'est élevé à plusieurs reprises contre le capitalisme financier, composé de "spéculateurs" et de "rentiers" pour se faire le défenseur du capitalisme d'"entrepreneurs". Qu'est ce que signifie vouloir en finir avec le capitalisme financier ? Est-ce réaliste ? Quelles en seraient les conséquences ?

Il faut se rappeler qu'en août 2007, le chef de l'Etat était à l'origine de la loi votée en faveur du travail, de l'emploi et du pouvoir d'achat (TEPA). Celle-ci a supprimé les droits de suc-

cession pour exonérer la majorité des héritages, si ce n'est tous, à l'aide des différentes donations possibles. Or supprimer ces droits peut favoriser la formation d'une société bloquée de rentiers. Les milliardaires américains, tels Georges Soros, Warren Buffet, les héritiers Rockefeller entre autres, l'avaient bien compris en 2001 en s'opposant à Georges W. Bush, qui alors voulait supprimer les droits de succession. Ces milliardaires, ayant pour beaucoup construit leur fortune sur les mar-

chés financiers, affirmaient par leur pétition que l'enrichissement ne doit pas tenir de l'hérédité mais du mérite.

Le débat entre les pourfendeurs et les admirateurs du capitalisme financier n'est pas récent. Les dénonciateurs de la spéculation, à l'origine de la déstabilisation des marchés financiers et ensuite de l'économie réelle, n'ont pas attendu cette crise pour s'élever. Les chantres des marchés financiers et de la spéculation qui optimise les échanges non plus. Alors que penser ?

Un grand économiste qui a vécu l'autre grande crise, celle de 1929, peut nous éclairer. En effet, Keynes développe une analyse subtile de la spéculation dans le chapitre 12 de la *Théorie Générale de l'Emploi, de l'Intérêt et de la Monnaie*. Outre le fait d'être l'un des plus grands économistes du XX<sup>ème</sup> siècle, Keynes était aussi un fin spéculateur. Son analyse de la spéculation et de son impact sur l'économie n'en est que plus intéressante. Il définit cette activité de manière peu glorieuse. Quelques extraits suffisent pour nous en convaincre : "[Les spéculateurs] se préoccupent, non de la valeur véritable d'un investissement pour un homme qui l'acquiert afin de le mettre en portefeuille, mais de la valeur que le marché, sous l'influence de la psychologie de masse, lui attribuera trois mois ou un an plus tard. [...] Telle est la conséquence inévitable de l'existence de marchés financiers conçus en vue de

ce qu'on est convenu d'appeler la "liquidité" (Payot)."

Pourtant Keynes ajoute que cette liquidité est nécessaire aux marchés financiers pour qu'ils puissent exister et drainer des investissements nouveaux. Liquidité signifie fluidité des échanges. Ainsi il faut bien des acheteurs lorsque tout le monde vend. Et ces acheteurs ne peuvent être que des spéculateurs, ces investisseurs "éclairés" qui, selon Keynes, ont pour objectif de "prévoir la psychologie du marché". L'attrait des marchés financiers serait réduit à néant si l'épargnant ne pouvait retirer son argent quand il le souhaite, car dans ce cas, il le placerait ailleurs.

Opposer deux capitalismes n'est donc pas une solution. La spéculation malgré ses aspects choquants, peut s'avérer très utile aux marchés financiers. La considérer comme un fléau serait contre-productif. Cela reviendrait à bannir les marchés financiers, tout de même utiles aux investissements de nos économies.

En revanche, définir un code éthique du spéculateur au niveau mondial qui l'obligerait à reverser une partie de ses bénéfices à la lutte contre d'autres fléaux comme la faim dans le monde, les maladies, la pollution ne serait peut-être pas inutile... en évitant de supprimer la sacro-sainte liquidité, ce que la taxe Tobin sur les transactions monétaires est malheureusement susceptible de détruire.

### 1.1.1 Évolution dans les années 70

#### Croissance de la liquidité et des transferts de risque

Les années 70 sont caractérisées par l'apparition de fortes incertitudes financières : l'inflation s'accrût, en même temps que le développement de la volatilité des taux, ainsi qu'une importante instabilité des taux de change et des produits énergétiques avec les deux chocs pétroliers, et enfin l'endettement croissant des pays en voie de développement. Ces événements se sont accompagnés d'une croissance des marchés financiers pour faciliter les transferts de risques entre entreprises ou États. Ces derniers ont eu pour conséquence une augmentation de la liquidité, via la multiplication des marchés de dérivés.

Remarquons que ce mouvement est inverse à celui d'après la crise de 1929, qui avait vu Roosevelt supprimer les marchés de dérivés. Comment expliquer cette évolution ? Il faut rappeler que les crises financières aboutissent en majorité à des crises de liquidité. Cela est appuyé par l'image d'Épinal des épargnants pris de panique allant retirer leur argent en faisant la queue devant les banques lors de crises comme celle de 1929 par exemple. Une crise financière peut avoir de multiples causes, qui sont souvent des bulles spéculatives, mais se termine toujours par un défaut de liquidité et donc la faillite de firmes, d'États ou encore de ménages. Le fait de faciliter les transferts de liquidité via les produits dérivés permet d'éviter la contagion à toutes les entreprises d'une même place financière. Et les outils développés dans les années 70 ont permis aussi de faciliter leur échange : évaluation d'un call par Black et Scholes et amélioration des outils

informatiques entre autres.

Il en est ainsi également de la crise des subprimes de l'été 2007 : suite à la faillite de ménages américains sur-endettés dont les emprunts se retrouvaient dans des portefeuilles de crédit sophistiqués dans les banques internationales, il devint difficile de trouver des acheteurs de ces produits devenus alors illiquides. Sans l'utilisation de produits assurantiels et l'intervention des banques centrales ajoutant de la liquidité sur les marchés financiers, peut-être que la crise aurait eu, en tout cas au début, des conséquences encore plus graves.

Mais cette remarque en implique une autre sur l'autre face de Janus des marchés financiers autrement moins souriante : la facilitation des transferts de risque a été favorisée par des produits dérivés et des innovations financières complexes contiguës, augmentant les appétits des spéculateurs y trouvant des sources de profit simples et rapides. Ces produits dérivés ont ainsi certes permis une croissance de la liquidité nécessaire pour éviter la faillite, mais l'opacité les accompagnant a augmenté les risques sous-jacents, en facilitant la spéculation et l'instabilité financière. La crise de 2007-2008 est entre autres causée par un manque de confiance dans les produits de crédit complexes, innovants mais difficiles à évaluer. La bulle spéculative sur les prix des matières premières du printemps 2008 est aussi révélatrice de l'appétit des spéculateurs à faire des profits rapides. Ceci explique certainement pourquoi Roosevelt avait voulu la suppression des marchés de dérivés dans les années 1930.

Sur la crise des subprimes, voici un point de vue paru dans Ouest France le 3 octobre 2008.

## Un an après la crise des subprimes

Avec le recul de l'année passée, peut-on faire l'analyse de la crise financière des "subprimes", ces crédits immobiliers accordés aux ménages américains modestes et peu solvables ? Et comprendre comment on a pu aboutir à l'Implosion du capitalisme financier que décrit Paul Jorion (Fayard), et que confirme la mise en faillite de Lehman Brothers ?

Tout d'abord, la conjoncture économique a été, aux Etats-Unis en particulier, très favorable ces dernières années : un taux d'emprunt bas et un marché de l'immobilier en très forte hausse. Et comme souvent dans ce cas, les gens perdent la mémoire et pensent que si ça monte, ça va continuer de monter. Lorsque l'on ajoute une culture de fort endettement, propre aux américains notamment, les choses se compliquent. En effet, un américain, lorsqu'il reçoit 100, dépense 101 : d'une part il n'épargne pas et d'autre part il emprunte.

C'est ici qu'intervient la responsabilité des banques et des instituts prêteurs qui ont abusé d'une part de prêts à des ménages non solvables et d'autre part s'en sont déchargé sur d'autres investisseurs, via la sophistication de la titrisation. Une technique qui consiste à transférer à des investisseurs des actifs, tels que des créances, en les transformant en titres

financiers. Ainsi s'est opérée une dissociation entre la distribution du crédit et la gestion de son financement.

### Manque de transparence

Présentons ce mécanisme complexe de manière plus simple. Une banque américaine va prêter à chacun de ses 100 clients 100 mille dollars pour acheter une maison. Parmi ces 100 ménages, certains ont acheté une maison avec piscine de 300 m<sup>2</sup> en Californie avec des revenus insuffisants : ce sont ces ménages que l'on appelle les emprunteurs "subprimes", (littéralement "en dessous" des emprunteurs solvables dits "prime"). Mais comme ils ont la possibilité de rembourser seulement les intérêts, variables la plupart du temps, pendant la période du prêt et le capital in fine, la lourdeur de l'emprunt est amoindrie. En outre, avec un bien qui ne perd pas de sa valeur, l'emprunteur pourra rembourser à l'aide de la revente de sa maison. Cette logique est viable lorsque les taux sont faibles et que le marché de l'immobilier ne chute pas.

Mais revenons à la banque américaine. Elle a une créance de 10 millions de dollars. Au lieu de supporter ce poids de dette, elle va donner la "patate chaude" à d'autres investisseurs (les fonds de pension, les fonds spéculatifs, voire même le gestionnaire d'une SICAV mo-

nétaire d'une banque française). Ainsi, le prêt fait à ces 100 ménages, dont certains "sub-primes", se retrouve être supporté non plus par la banque américaine mais par de multiples acteurs disséminés partout dans le monde. La dilution des 10 millions de dollars semble être la garantie à la non-perte de ce capital. L'avantage pour les investisseurs est qu'ils perçoivent alors un taux d'intérêt élevé. Car lorsque l'on prête à des individus sans fort capital, on leur demande un taux d'intérêt plus élevé. Ce système satisfaisait tout le monde. Seulement lorsque les taux ont monté et que le marché de l'immobilier a chuté, les ménages

américains qui se croyaient être devenus propriétaires se sont retrouvés à la rue.

Le problème non résolu à ce jour est le manque de transparence des marchés financiers. En effet, c'est sur leur opacité que se sont fait la valeur des contrats titrisés réalisés ces dernières années. Leur valeur aurait dû être beaucoup plus faible si l'évaluation avait pris en compte le risque de baisse de l'immobilier. Il faut donc éviter de penser que le pire est toujours derrière nous lorsque la conjoncture s'améliore. Cela évitera peut-être de croire que l'on peut faire de l'argent sans créer de valeur.

### Capitalisme actionnarial et apparition des "zinzins"

Outre la croissance de la liquidité et des transferts de risque, les années 70 voient l'apparition d'une nouvelle forme de gouvernance des entreprises. Le capitalisme managérial va ainsi être détrôné par un capitalisme où le contrôle et la propriété (Berle et Means [4]) ne sont plus séparés, où le *principal*, l'actionnaire, va pouvoir avoir un contrôle sur l'*agent*, le manager. Ainsi, la capitalisme va devenir actionnarial et l'*outsider* qu'est l'actionnaire va avoir un impact très important sur la gouvernance d'entreprise et sur l'*insider* que représente le manager. Le capitalisme actionnarial a transformé en profondeur nos entreprises en réduisant l'asymétrie d'information existant par définition entre le propriétaire de la firme et son dirigeant.

Cette évolution de l'actionnariat est favorisée par l'apparition de nouveaux acteurs collectant une épargne de plus en plus importante : les investisseurs institutionnels ou "zinzins". Ce nouvel actionnariat va prendre de nombreux visages : fonds de pension, mutual funds (fonds communs de placement), hedge funds, assureurs ou encore les fonds souverains, dont les activités font l'actualité récente.

Les conséquences sont autant sociales qu'économiques. La presse relate en effet très régulièrement les décisions des actionnaires délocalisant les industries par exemple pour diminuer les coûts et augmenter la valeur actionnariale de l'entreprise. Nous étudierons plus bas la définition de l'action comme instrument financier et nous comprendrons la relation proportionnelle entre la valeur de l'action et les bénéfices pouvant être retirés d'une firme : plus les bénéfices anticipés seront importants, plus l'action augmentera sa valeur. Nous comprenons donc pourquoi lorsque des licenciements sont annoncés, la valeur de l'action augmente. Et ceci n'est pas dû à la malveillance des actionnaires mais à leur volonté de maximiser leur investissement dans la firme : une vague de licenciements réduira les coûts et augmentera les bénéfices futurs. Tout le débat est alors de savoir si ces coûts à court-terme n'auraient pas pu être aussi des bénéfices à long-terme... Mais aujourd'hui le bénéfice social n'est pas intégré dans la valeur actionnariale.

Mais revenons aux "zinzins". Ils ont aujourd'hui une épargne considérable à gérer. Ce besoin nécessite une professionnalisation de plus en plus importante des techniques de gestion. L'intermédiation est alors rendue nécessaire par l'asymétrie d'information qui existe entre un particulier ou un fonds de pension et le gérant professionnel. Et cette gestion doit intégrer deux objectifs paradoxaux : ne rien perdre tout en gagnant le plus possible ! Cette double exigence va demander, outre un contrôle de plus en plus accru sur la gouvernance d'une entreprise, le développement d'outils quantitatifs aidant à la gestion efficace de cette épargne satisfaisant au mieux le client, qui vit dans une société de plus en plus imprégnée par la maîtrise du risque.

Voici un point de vue paru dans Ouest France le 3 novembre 2008.

## Les fonds, nouveau visage du capitalisme financier

Depuis le début de la crise financière, on a évoqué des prises de position hasardeuses des

banques qui leur ont fait perdre des sommes gigantesques. Une des raisons à ces déroutes est l'éloignement des banques de leur métier historique, qui est de financer l'économie, vers celui d'investisseurs plus agressifs, qui sont souvent appelés "fonds". Or cette dénomination englobe une diversité d'acteurs.

Un fonds est une société ayant du capital financier à gérer pour le compte d'autres individus ou institutions. Ces sociétés créent alors un ou plusieurs fonds qui vont investir dans une entreprise ou dans des titres financiers. Par abus de langage, on dénomme le tout, la société de gestion, par sa partie, le ou les fonds.

Tout d'abord, les **fonds de pension** les plus décriés, détruisant ici des emplois, rapportant là-bas (c'est moins vrai) de belles pensions aux retraités. Ces sociétés sont des collecteurs d'épargne pour la retraite de leur client. En France, la retraite est en majorité issue du principe de répartition, c'est-à-dire que la génération au travail paye la retraite des plus de 60 ans. Aux États-Unis, la réalité est autre : chacun épargne durant son travail pour sa retraite. Et cette épargne est collectée par des sociétés travaillant à faire fructifier le plus possible sans perdre l'argent de leurs futurs retraités. La somme détenue par ces fonds est colossale. Le problème est que dans 20 ans, à cause du papy boom, il y aura plus de retraits d'argent que d'entrées ce qui pousse ces fonds à demander une performance de leurs investissements plus importante.

#### Les nouveaux agressifs

Pour créer de la performance, plusieurs sociétés proposent leur service, les fonds de pension déléguant la gestion active de leur argent.

Tout d'abord, les **fonds mutuels** sont les plus traditionnels : ils investissent sur les marchés avec les outils classiques (actions, obligations) et une certaine expertise mais un contrôle des risques les amenant à ne pas faire n'importe quoi. En France, ce sont les SICAV (Sociétés d'Investissement à Capital Variable) ou encore les FCP (Fonds Communs de Placement) que les banques proposent par exemple au sein d'un PEA (Plan d'Épargne en Actions). Leur gestion classique subit de plus en plus la concurrence de gestionnaires plus agressifs.

Les **fonds de private equity**<sup>1</sup> ont fait leurs premiers pas en France avec par exemple l'achat du PSG par Colony Capital, ou encore Legrand par KKR et la famille française Wendel. Ces fonds vont investir dans des entreprises non cotées ou des entreprises cotées qu'ils retirent de la Bourse. Ils deviennent les propriétaires de ces entreprises et leur objectif est de rationaliser la gestion, l'améliorer, pour les revendre avec une plus-value importante.

Pour en devenir propriétaire, ces fonds font appel à des emprunts colossaux. Les fonds de pension peuvent faire partie alors des prêteurs potentiels à ce type d'achat, appelé LBO : Leverage Buy-Out. En misant peu de sous et en réalisant une large plus-value, ces fonds ont attiré de nombreux investisseurs avides de rendements importants. L'enquête passionnante de Godeluck et Escande *Les pirates du Capitalisme* (Albin Michel, 2008) en explique le fonctionnement.

Les seconds fonds "agressifs" sont les **fonds spéculatifs** qui ne vont pas agir hors de la Bourse, mais au contraire utiliser les anomalies de prix des actifs financiers pour créer de la performance. Ils peuvent aussi s'intéresser à rendre plus performant le management d'une entreprise en achetant une minorité d'actions et en poussant de manière agressive le management à se transformer lors des assemblées générales.

Dernière catégorie de fonds, les **fonds souverains** : ils ont l'apparence de fonds de pension mais sont beaucoup plus opaques sur leurs intentions. Ils se sont développés à l'aide des fortes réserves d'argent que les États exportateurs ont pu accumuler, soit par le pétrole, comme la Norvège ou les Émirats Arabes Unis, soit par les biens de consommation exportés et les réserves de change induites, comme la Chine. Ils ont été ces derniers mois de grands pourvoyeurs de liquidité en investissant dans les banques affaiblies par la crise. Et Nicolas Sarkozy vient de lancer la création d'un fonds français.

Le développement de ces nouveaux acteurs est lié à la crise que l'on vit actuellement : une épargne excessive investie dans des actifs existants et non innovants, comme l'immobi-

1. "Private equity" s'oppose en anglais à "public equity" qui signifie "capital issu de la Bourse", donc public par la large information diffusée sur les entreprises cotées.

lier, créant alors une bulle. Et les banques qui ont voulu participer à cette euphorie en copiant les fonds spéculatifs par exemple ont pu perdre énormément.

Ces nouveaux acteurs du capitalisme peuvent peser sur nos économies de façon parfois dé-

sastreuse. Non pas parce que ces acteurs sont pétris de mauvaises intentions mais parce qu'il manque des contre-pouvoirs à ces fonds qui éviteraient de les rendre trop puissants. A quand la mise en place d'une Organisation Mondiale des Marchés Financiers ?

### 1.1.2 La culture du risque dans nos sociétés contemporaines

En finance, les crises boursières ne viennent pas juste d'apparaître. Les deux précédents siècles en sont emplis. La considération du risque sur les marchés financiers et sa modélisation, sa mesure et sa gestion sont pourtant plus récents. Les crises des années 90 (Barings, NatWest, LTCM) pourraient expliquer le besoin qui s'est fait ressentir à ce moment-là de s'intéresser plus rigoureusement depuis 20 ans au risque avec notamment la mise en place du Comité de Bâle permettant de réguler les activités des institutions financières.

Une autre raison peut être aussi à chercher dans les progrès accomplis dans la puissance des outils informatiques ainsi que ceux faits en mathématiques à commencer par le pricing du call européen de Black-Scholes. Néanmoins, nous ne pensons pas qu'il n'y ait que cela. Il faut pour le comprendre ne pas se concentrer seulement sur la sphère financière mais étudier les évolutions de la société dans sa globalité. En effet, la mutation de nos sociétés occidentales ces 20 dernières années peuvent aussi être un élément d'explication qu'il ne faudrait pas négliger. Et cette mutation, facteur essentiel de l'évolution actuelle des marchés financiers, est l'émergence d'une société du risque.

Le mot risque a pour étymologie le latin *ressecum* signifiant "ce qui coupe" et caractérisant donc une menace. Ce mot est apparu dans son sens actuel au XIV<sup>e</sup> siècle dans les assurances maritimes italiennes. Aujourd'hui, ce terme se retrouve dans presque tous les événements qui touchent nos sociétés allant des risques technologiques, écologiques, sanitaires à la circulation automobile et à l'insécurité de nos villes.

Pour appréhender ces risques, les experts chiffrent leur danger. Patrick Peretti-Watel [30] illustre cela à l'aide de l'épisode de l'explosion d'un réacteur chimique produisant des herbicides à Seveso en Italie le 10 juillet 1976. Les dangers sur les femmes enceintes n'étant pas négligeables, les habitants voulurent alors absolument savoir quel était le pourcentage de femmes pouvant avoir des séquelles. Des situations similaires dans le passé n'existant pas, il s'avérait impossible de quantifier ce danger. Or les habitants demandaient de manière insistante un chiffre, qu'a fini par leur donner un expert avec le pourcentage 30%. Malgré le peu de fondement que représentait ce chiffre, il rassura les habitants.

Ainsi, pour maîtriser un danger, le fait de le quantifier permet de le gérer même si dans certains cas le chiffre donné ne signifie rien car la situation n'est pas probabilisable. Peretti-Watel décrit l'exemple du patron de la marque de whisky Cutty Stark qui avait proposé une énorme récompense à celui qui découvrirait le monstre du Loch Ness. Bien sûr celui-ci n'existe pas. Mais certainement par paranoïa, il se couvrit de la découverte de ce monstre en souscrivant une assurance chez Lloyd's. La prime de cette assurance a dû être difficile à déterminer sachant qu'elle se fondait sur un événement impossible.

Enfin, pour gérer les risques, il faut faire des choix politiques. En effet, de nombreux seuils vont être déterminés pour savoir si une situation présente un danger ou pas. Il en est ainsi de la détection de la trisomie par amniocentèse qui demande des examens très lourds pour la femme enceinte et assez risqués : des méthodes de dépistage sanguin ont pu être développés mais avec une incertitude. Le seuil défini est donc issu d'un choix politique d'une responsabilité importante. A la fin des années 80, ce principe du seuil, sous-jacent au principe de précaution, a connu un fort succès. Et ce principe a été fortement développé dans de nombreux domaines comme la santé, l'environnement, la génétique, la sécurité au travail ou encore la finance : ainsi le comité de Bâle a défini les premiers accords de réglementations bancaires Bâle I en 1988 à l'aide d'un ratio déterminant un montant de réserve permettant aux institutions financières de se couvrir contre un risque de perte élevée. La difficulté fut alors de définir ce montant ou ce seuil de perte potentielle.

Ces différentes réglementations sont donc difficiles à quantifier scientifiquement car fondées sur des probabilités extrêmes. Le ratio du comité de Bâle subit une incertitude relativement importante. Et ces réglementations ne permettent pas d'éviter toutes les crises : durant l'été 2007, la crise des subprimes n'a pas pu être évitée malgré les précautions normalement édictées. Mais comme la nécessité de la mesure, nous l'avons vu, est essentielle d'un point de vue sociétale, il faut en accepter les limites. La science a tout de même progressé et applique aujourd'hui les résultats de théories probabilistes (théorie des valeurs extrêmes, théorie des copules) pour obtenir des mesures des risques extrêmes plus précises. Malheureusement, ces techniques ne sont pas encore assez développées.

Nos sociétés contemporaines ont donc développé une importante culture du risque. Selon Giddens [15], le risque est mobilisé par tout individu comme mode de représentation du quotidien. La société est en effet davantage orientée vers le futur et moins ancrée dans le passé et les individus mettent en oeuvre une rationalité probabiliste pour évaluer les conséquences de leurs actions. Le futur devient donc un territoire à coloniser.

Beck [3], un autre sociologue travaillant sur ces problématiques, a montré les évolutions de l'individu de nos sociétés : il doit se projeter dans le futur en essayant de le contrôler et en refusant le déterminisme. La société industrielle traditionnelle était caractérisée par la lutte souvent collective contre la pauvreté et le déclin. Aujourd'hui, l'individu est livré à lui-même faisant face à une multitude de risques.

Les marchés financiers sont aussi le miroir de cette culture du risque imprégnant nos sociétés contemporaines. Les krachs boursiers font peur et peuvent affecter l'existence de tout un chacun. En outre, les agents de ces marchés "créent le futur qu'ils tentent de coloniser" selon Peretti-Watel : effectivement, entretenant eux-mêmes la volatilité des marchés financiers, ils créent les risques financiers imprévisibles qu'il leur faudra évaluer et gérer.

Voici un point de vue paru dans Ouest France le 16 décembre 2008.

## Climat, finance, même combat

En attendant l'engagement de l'équipe Obama dans la lutte contre le réchauffement climatique, la conférence de Poznan a montré que les bases d'un accord international étaient difficiles à réunir.

Or les erreurs à l'origine de la crise financière doivent nous convaincre de l'urgence à mettre en place des mesures courageuses contre le changement climatique. Ces erreurs ont déjà été énoncées : désengagement de l'Etat providence, laisser-aller sur les marchés financiers, excès d'innovations financières ne créant pas ou peu de valeur, endettement excessif, spéculation non régulée. Une idée relie ces évolutions : celle d'une faible perception du risque.

Si par exemple les responsables ont laissé l'Etat providence disparaître peu à peu, c'est entre autres à cause d'une perception de l'avenir sans embûches : sinon, pourquoi se doter d'un système de redistribution des richesses performant, car la pauvreté serait un risque éloigné ? Autre exemple : si les prêteurs américains ont été généreux avec les ménages sub-

primes, c'est parce-que le risque de baisse de la valeur de l'immobilier était perçu comme improbable. Aujourd'hui, ces deux perceptions se sont inversées.

Pourtant, nos sociétés avaient développés depuis la fin des années 80 (le livre de Beck publié en 1986 *La société du risque : sur la voie d'une autre modernité* est très éclairant) une perception réelle du risque collectif à la suite de drames, comme Tchernobyl, ou, d'un point de vue financier, après le krach d'octobre 1987. Les politiques avaient mis en place de réglementations.

Dans le domaine financier, les premiers accords de Bâle ont vu le jour en 1988 avec l'objectif affiché d'éviter la contagion de faillites bancaires à tout le système financier, en contraignant les banques à conserver une partie de leurs fonds propres en réserve. Malheureusement, on constate l'échec de ce système de réglementations. Pourquoi ? Car la perception aigüe du risque développée dans les années 80 a été délaissée au profit des rende-

ments à court-terme, proposés par les innovations financières des années 90, ainsi que ceux des bulles technologique et immobilière des années 2000.

Ce qui empêche de percevoir le risque, c'est la rentabilité attendue. En finance, on a l'habitude de parler de couple rendement-risque pour dire que le risque évolue avec le rendement. Le problème, très bien décrit par Frédéric Lordon dans son dernier livre *Jusqu'à quand ? Pour en finir avec les crises financières*, est que le risque se mesure seulement après qu'on a réalisé l'investissement : il est difficile en effet de prévoir le risque encouru. L'auteur va jusqu'à affirmer que "le contrôle des risques est une chimère".

Dans les banques, évaluer le risque engagé est complexe ; c'est néanmoins possible si l'on comprend que risque et rendement sont deux notions non reliées dans le temps : le rendement est une notion de court-terme et le risque une notion de long-terme. Admettre cela permet de poser des règles : augmenter la réserve

de fonds propres des banques lorsque l'environnement économique est favorable (rendement bon et perception faible du risque) pour pouvoir la diminuer dans le cas contraire (rendement mauvais et perception forte du risque). De telles règles auraient permis aux banques de moins participer à la bulle et de pouvoir répondre aux pertes actuelles sans faire appel à l'Etat.

Revenons au changement climatique. La perception des risques est encore faible, alors que les rendements retirés de la consommation du pétrole par exemple sont élevés pour nos sociétés. Il apparaît urgent que les politiques définissent des règles plus volontaires d'économies d'énergie, certes contraignantes aujourd'hui, mais qui nous permettront d'éviter le pire dans quelques années. Forcer les banques à moins investir d'argent pendant la bulle aurait été salvateur... Et c'est le rôle du Politique de définir les conditions nécessaires aujourd'hui pour bien vivre ensemble.

#### Conseil pratique de gestion

*Cette introduction aux enjeux de la finance contemporaine permet de mettre en évidence la nécessité de gérer efficacement l'épargne collective en insistant sur le risque pris. Le premier conseil de gestion est donc d'étudier rigoureusement le contexte économique et avoir un recul sur les différents acteurs de la finance, les outils à disposition, et l'incertitude inhérente à tout projet d'investissement.*

## 1.2 Mesurer les risques financiers

Nous allons dans cette section nous intéresser à la mesure du risque et plus précisément le risque de marché. Trois risques principaux peuvent être distingués en finance de marché : le risque de variation d'un actif financier (risque de marché), le risque de défaillance d'un émetteur de dette (risque de crédit), et le risque induit par des opérations de marché comme les erreurs de saisie, les fraudes, etc. (risque opérationnel).

Cette section sera dédiée à la mesure du risque de variation du prix d'un actif et plus précisément, pour des raisons pédagogiques, à celui de l'action. Nous définirons l'action et déterminerons l'évaluation de son prix. Notre intérêt se portera alors sur la prime de risque associée au prix de l'action. Deux voies seront alors explorées pour mesurer le risque de variation : les sensibilités de la prime de risque à des facteurs de risque et les mesures synthétiques du risque de variation du prix d'une action.

### 1.2.1 Évaluation d'une action

Une action est un titre de propriété représentant une fraction du capital d'une société. Généralement, cette valeur mobilière est cotée en Bourse et a une liquidité normalement assurée. En outre, elle confère à son acquéreur des droits sur l'entreprise, étant donné qu'il en devient propriétaire. Une action donne droit à un vote au sein de l'assemblée générale des actionnaires. Lors de cette assemblée, il est discuté de la gestion de l'entreprise pour laquelle les actionnaires sont responsables.

Nous pouvons distinguer pour un actionnaire ses droits monétaires de ses droits non monétaires. Pour les premiers, nous avons principalement :

- Le droit au dividende : le solde bénéficiaire des comptes annuels d'une entreprise, égal aux recettes auxquelles on soustrait les charges, est réparti entre les réserves de la société, servant à son autofinancement, et les dividendes, affectés aux actionnaires. Ceux-ci sont variables puisqu'ils dépendent des résultats d'une firme. Ce dividende peut soit être payé à l'actionnaire soit transformé en actions nouvelles gratuites. Le *payout ratio* correspondant au ratio entre les dividendes et les bénéfices nets est variable suivant les sociétés : celles de secteurs mûres vont distribuer des dividendes plus importants que celles de secteurs en croissance, qui veulent croître plus rapidement et allouer donc plus de capitaux à l'investissement.
- Le droit sur l'actif social : les actionnaires ont un droit proportionnel à la quantité d'actions qu'ils possèdent sur le patrimoine de l'entreprise, déduction faite des dettes<sup>2</sup>. Ainsi, lors d'une augmentation de capital, les actionnaires ont une priorité sur les actions nouvellement émises.

Pour les seconds, nous pouvons distinguer :

- Le droit à l'information : ils ont accès à tous les documents relatifs à l'activité et aux résultats de la société.
- Le droit de vote, permettant lors de l'assemblée générale annuelle de fixer les dividendes, prendre des décisions de gestion, délibérer sur les comptes de la société.
- Le droit d'exercer en justice : les actionnaires mécontents de la gouvernance de l'entreprise peuvent poursuivre les administrateurs en justice. Précisons que ces derniers, élus par les actionnaires lors de l'assemblée générale, nomment le directeur général qui a en charge la gestion de la société.

#### Évaluation comptable

Pour évaluer une action, nous avons tout d'abord la valeur comptable simple, appelée valeur boursière ou de marché :

$$\text{Action} = \frac{\text{Capitalisation Boursière}}{\text{Nombre total d'actions existantes}}$$

Cette valeur est évaluée sur le marché par les différents acteurs qui estiment la valeur de l'actif net de la firme.

2. Lors d'une faillite, les actionnaires ne sont dédommages qu'après remboursement des créanciers qui sont prioritaires.

Comment ces derniers estiment la valeur de la firme ? Le processus d'évaluation peut être modélisé à l'aide de la théorie de l'efficience des marchés que nous décrivons ici.

#### *Efficience des marchés financiers*

La théorie des marchés efficients a atteint son point d'acmé dans la recherche financière autour des années 70. C'est au même moment la prédominance de la théorie des anticipations rationnelles en Économie. Cette dernière est en partie née de l'insatisfaction croissante ressentie par de nombreux économistes à l'égard des anticipations adaptatives développées par Milton Friedman.

En 1960, John Muth avance que la prévision des agents est "parfaite", sans être forcément exacte ; elle est fondée sur des lois de probabilité effectivement suivies par les phénomènes étudiés. Si des erreurs se produisent, elles ne peuvent pas être systématiques car sinon les agents rationnels s'en apercevraient et l'intégreraient dans leurs calculs.

Les anticipations rationnelles supposent l'équilibre permanent et l'autoréalisation de la croyance des agents. Le concept d'autoréalisation signifie que l'agent représente l'économie sous la forme d'un modèle, ce dernier étant à l'origine d'actions qui *engendrent* les situations qu'il décrit. Ainsi, les croyances des agents, de type walrassiens, sont-elles considérées comme un paramètre que se donne *a priori* le modélisateur.

Robert Lucas introduit l'hypothèse des anticipations rationnelles au début des années 70. Les grands courants de pensée économique, les nouveaux classiques, les monétaristes et quelques keynésiens ont adopté cette théorie.

Cette revue rapide de la théorie économique de cette période est importante pour comprendre l'engouement de l'introduction des mathématiques (c'est en effet à ce moment aussi que Black et Scholes, en 1973 plus précisément, font l'hypothèse que les évolutions des prix des actifs suivent une marche aléatoire) et des prévisions parfaites en théorie financière, sur lesquelles se fonde la théorie de l'efficience.

En effet, l'Hypothèse d'Efficience des Marchés (HEM) financiers énonce l'idée que les prix spéculatifs des actifs (comme les actions) incorporent toujours et sans friction la meilleure information des valeurs fondamentales (prévision de bénéfices, etc.) et les évolutions des prix ne sont dues qu'à des changements dans cette information. L'information peut prendre différentes formes (série des prix passés, information publique ou privée), mais dans tous les cas, elle est entièrement et instantanément intégrée par les prix.

Dans les années 80 et 90, des doutes ont commencé à poindre sur l'hypothèse d'efficience et les modèles traditionnels d'évaluation des actifs, tels le Capital Asset Pricing Model (cf. section 1.2.2). Mais, les chantres de cette dernière avançaient et avançaient toujours que cette théorie a certes, comme toute théorie, des hypothèses restrictives mais elle permet d'appréhender au mieux l'univers des marchés financiers ; les écarts à cette théorie ne sont que des anomalies. Parmi ces anomalies, nous pouvons citer la présence sur les marchés actions d'autocorrélations positives et stables entre les rentabilités d'aujourd'hui et celles du passé proche (phénomène de momentum), ainsi que des autocorrélations négatives dans le long terme (phénomènes de retour à la moyenne des prix).

Fama [13], auteur d'un modèle plus raffiné d'évaluation des actifs dans le cadre de l'efficience (modèle de Fama-French [14], cf. section 1.2.2), énonce bien l'enjeu : "Suivant la loi traditionnelle de la Science, l'efficience des marchés peut être seulement remplacée par un meilleur modèle". Et ce dernier doit satisfaire des critères rigoureux : "il doit spécifier ce qui dans la psychologie de l'investisseur permet d'expliquer simultanément les causes de sous-réaction à certains types d'événements et de sur-réaction à d'autres. [...] Et la théorie alternative doit avoir des hypothèses rigoureusement définies, elles-mêmes potentiellement rejetables par des tests empiriques".

Des auteurs sont ainsi parvenus à l'élaboration de cadres théoriques où les anomalies de l'efficience des marchés y sont les fondements, comme les phénomènes de sous et sur-réaction à la diffusion de l'information par exemple. Nous n'allons pas les étudier ici mais utiliser leurs résultats pour créer de la performance dans la section 3.3.

### Valeur fondamentale d'une action

L'HEM stipule que le prix observé d'un titre financier, quel qu'il soit, est égal à sa valeur fondamentale, définie comme le flux des revenus futurs actualisés auquel le titre donne droit. Ainsi, en supposant que les dividendes intègrent toute l'information sur les fondamentaux économiques du cours des actions, la valeur  $V_0^i$  du titre de la société  $i$  est définie par la somme actualisée de ses flux futurs générés, les dividendes  $D_t$ , jusqu'à la fin de sa vie (considérée comme infinie) :

$$V_0^i = \sum_{t=1}^{+\infty} \frac{D_t}{(1 + r_f + \rho^i)^t}$$

avec  $r_f$  le taux sans risque et  $\rho^i$  la prime de risque nécessitée par la firme  $i$  : cette dernière est égale en fait à la rentabilité de l'action à laquelle on soustrait le taux sans risque.

Nous verrons dans la section 1.2.2 qu'elle peut être expliquée par des facteurs de risque évalués sur le marché sur lequel est traitée l'action correspondante. Si l'efficience des marchés est vérifiée, ces derniers expliqueront totalement la prime de risque de l'action et la valeur  $V_0^i$  définira le juste prix ou *fair price* de l'action.

En effet, si la prime de risque est intégralement expliquée par les facteurs de risque, le marché l'évaluera de manière juste. Dans le cas échéant, la *vraie* prime de risque sera soit plus faible soit plus élevée que celle *pricée* par le marché, ce qui signifiera que la valeur fondamentale sera soit plus élevée soit plus faible et donc l'action sera soit sous-évaluée soit sur-évaluée.

Et dans ces cas, des possibilités d'arbitrage et de créer de la performance se présenteront donc. Nous reviendrons plus précisément sur ces mécanismes d'arbitrage dans la suite du cours.

Une précision importante est à faire sur ce point. Il faut en effet souligner que la prime de risque est équivalente (au taux sans risque près) au coût issu de la détention du capital. Ce coût est *ex-ante*, et donc pas encore réalisé. Si le coût observé  $\rho^{\text{obs}}$  se révèle sur-évalué par les acteurs du marché par rapport au coût théorique  $\rho^{\text{th}}$ , alors il va diminuer pour tendre vers  $\rho^{\text{th}}$ , ce qui va faire augmenter la valeur de l'action et donc la rentabilité *ex-post*. Le coût du capital s'assimile donc (au taux sans risque près) à une prime de risque *ex-ante* et la rentabilité de l'action (au taux sans risque près) à une prime de risque *ex-post*. Malheureusement, dans la pratique, les deux primes de risque sont confondues car le coût du capital *ex-ante* est difficile à estimer (cf. modèles à facteurs de risque, section 1.2.2). On suppose donc que la rentabilité historique révèle aussi le comportement futur du coût du capital. Si aujourd'hui, la prime de risque *ex-post* est sur-évaluée, le coût du capital *ex-ante* appliqué pour l'actualisation sera sur-évalué, diminuera donc pour obtenir une rentabilité élevée, ce qui est cohérent avec la prévision préalable d'une prime de risque *ex-post* importante.

### Ratio financier d'évaluation

Pour apprécier l'écart à la valeur fondamentale, nous pouvons utiliser un ratio financier d'évaluation. Classiquement, il est utilisé soit le Dividend-Price Ratio, soit le Price-Earning Ratio PER. Ce dernier va être préféré car le Dividend-Price Ratio est très influencé par les politiques financières des entreprises (rachat d'actions par exemple augmentant les dividendes distribués). Le PER d'un actif financier se définit comme le rapport du cours de l'actif au bénéfice annuel qu'il rapporte. Il exprime donc le délai de récupération de cet actif, c'est-à-dire le nombre d'années de bénéfices sur lesquelles on valorise l'actif. Le prix d'un titre sera alors le produit du PER avec les bénéfices. C'est un indice tout d'abord d'anticipation de croissance d'une société : plus les anticipations de croissance forte sont élevées, plus le PER sera important. Et, c'est un indicateur de cherté d'une société au sein d'un même secteur : en effet, une société ayant un PER plus faible que le PER moyen du même secteur sera considérée comme peu chère. C'est donc un indicateur de valorisation : nous pouvons alors savoir si le PER d'une société est légitime ou non par rapport à un PER *juste*. Le processus des PER est souvent caractérisé par un phénomène de *retour à la moyenne*.

### Modèle de Gordon-Shapiro

Enfin, il faut remarquer qu'il est difficile de calculer un prix à partir du modèle d'actualisation des dividendes : effectivement, il se fonde sur des flux de revenus futurs aléatoires et difficiles à estimer. Les

investisseurs doivent en conséquences les anticiper sur la base des informations dont ils disposent. Le calcul de la valeur fondamentale va donc supposer des hypothèses réductrices. Le modèle le plus célèbre est celui de croissance perpétuelle défini par Gordon et Shapiro en 1956.

Ils supposent que le taux de croissance annuel des dividendes  $g$  est constant, ainsi que le coût des fonds propres, ou *cost of equity* CE de la société,  $r$ . Ce dernier est la rentabilité minimum que les actionnaires pensent pouvoir retirer de leur investissement dans l'action de la société. En outre,  $g < r$  pour éviter que la valeur de l'entreprise soit infinie. En conséquence, nous avons :

$$\begin{aligned} V_0 &= \sum_{t=1}^{+\infty} \frac{D_t}{(1+r)^t} = D_0 \sum_{t=1}^{+\infty} \left( \frac{1+g}{1+r} \right)^t \\ &= D_0 \frac{\frac{1+g}{1+r}}{1 - \frac{1+g}{1+r}} \quad \text{convergence d'une série géométrique de raison } |q| < 1 \\ &= D_0 \frac{1+g}{r-g} = \frac{D_1}{r-g} \end{aligned}$$

D'après ce modèle, l'action a une valeur fondamentale d'autant plus élevée que la part du bénéfice distribué est importante et que le coût du capital est faible, toutes choses égales par ailleurs. Ce modèle est néanmoins irréaliste : nous allons alors utiliser non plus des modèles d'évaluation à partir de l'actualisation des dividendes mais à partir du coût du capital. Ce dernier résume en effet l'incertitude concernant la distribution des dividendes : plus le coût des fonds propres est élevé, plus l'incertitude est importante et plus la valeur fondamentale est faible. Les financiers vont alors s'attacher à apprécier si le marché évalue à sa juste valeur le CE, et plus précisément la prime de risque de l'action égale au CE auquel on soustrait le taux sans risque. Le problème de l'évaluation de la valeur fondamentale d'une action va se déplacer sur celui de l'évaluation de la prime de risque.

#### **Conseil pratique de gestion**

*Cette introduction à l'évaluation du prix d'une action donne quelques indications quantitatives pour gérer un portefeuille actions en pratique : à l'aide par exemple du PER, il est possible d'acheter dans son portefeuille des actions sous-évaluées et de vendre des actions sur-évaluées.*

## 1.2.2 Modèles à facteurs de risque

Les modèles à facteurs vont permettre d'évaluer la prime de risque d'une action. La mesure du risque induit par la possession d'une action va alors se préciser.

### Capital Asset Pricing Model

Le Capital Asset Pricing Model (CAPM) ou Modèle d'Équilibre des Actifs Financiers (MEDAF) a été développé par Sharpe en 1964 [33], Lintner en 1965 [24] et Mossin en 1966 [28]. Les hypothèses de ce modèle sont les suivantes :

1. les investisseurs exigent une rentabilité d'autant plus forte que le risque est élevé : il existe donc une relation croissante entre rendement et risque,
2. un actif sans risque est disponible,
3. les anticipations sont identiques pour tous les investisseurs.

D'après ces hypothèses, nous pouvons exprimer l'espérance de la rentabilité  $R_i$  d'un portefeuille ou d'un actif risqué  $i$  en fonction de celle de l'actif sans risque  $r_f$  et de celle du portefeuille de marché  $R_M$ , qui est celui que tous les investisseurs possèdent :

$$\mathbb{E}(R_i) = r_f + \beta_i[\mathbb{E}(R_M) - r_f] \quad \text{avec } \beta_i = \frac{\text{cov}(R_i, R_M)}{\sigma^2(R_M)}$$

avec  $\sigma(\cdot)$  la volatilité de l'actif correspondant et  $\text{cov}(\cdot, \cdot)$  la fonction covariance. Pour des raisons pédagogiques, nous n'entrons pas dans la démonstration de ce modèle mais expliquons les conséquences empiriques et pratiques de cette modélisation de la prime de risque.

Nous pouvons aussi réécrire ce modèle de la manière suivante :

$$\rho_i = \mathbb{E}(R_i) - r_f = \beta_i[\mathbb{E}(R_M) - r_f] \quad (1.1)$$

pour faire apparaître la prime de risque  $\rho_i$ . Ainsi, plus les investisseurs seront exposés au portefeuille de marché, plus ils prendront de risque et plus leur rémunération consécutive potentielle sera théoriquement élevée.

Ce modèle explique donc la prime de risque d'un actif ou d'un portefeuille d'actifs  $i$  par sa sensibilité  $\beta_i$  par rapport au portefeuille de marché. Cette dernière dénote le caractère plus ou moins agressif d'un actif relativement au portefeuille de marché. Ainsi, si  $\beta_i > 1$ , l'actif est dit "offensif", et si  $\beta_i < 1$ , il est dit "défensif" relativement au marché considéré ( $\beta_i = 1$  correspond à une prise de risque similaire à celle prise par le portefeuille de marché). L'indicateur  $\beta$  est très utilisé par les praticiens car simple d'utilisation.

Cependant, outre les hypothèses restrictives du modèle d'équilibre, il possède aussi quelques limites de mise en oeuvre empiriques.

Tout d'abord, il est difficile de déterminer précisément le portefeuille de marché. Souvent, il est réduit à l'indice phare de la place financière dans laquelle est évalué l'actif ou le portefeuille. Seulement, ces indices n'intègrent pas tous les actifs risqués de l'univers d'investissement, comme le voudrait la théorie, puisqu'il se restreint aux actions.

Les poids alloués aux actions dans ces indices varient suivant les places financières. Ils peuvent être relatifs :

- à la valeur des titres : c'est le cas du plus vieil indice fondé en 1884, le Dow Jones Industrial Average composé de 30 entreprises américaines importantes,
- aux capitalisations boursières,
- et au flottant, défini comme la part de la capitalisation que l'on peut échanger sur les marchés (inférieur le plus souvent à la capitalisation boursière totale), traduisant donc la liquidité du titre. La pondération par le flottant est le cas de la plupart des indices aujourd'hui. Ainsi, le CAC 40 l'est depuis le 1er décembre 2003, après avoir été pondéré par les capitalisations.

Les créances bancaires, l'immobilier, le capital humain manquent donc dans la composition de ces indices et sont difficiles à mesurer précisément.

En outre, la seconde limite concerne l'estimation des  $\beta$ . Le modèle de régression sous-jacent au CAPM s'écrit :

$$\rho_i = R_i - r_f = \alpha_i + \beta_i[R_M - r_f] + \varepsilon_i$$

Le premier problème qui apparaît est l'instabilité des  $\beta_i$  suivant les périodes d'estimation. En effet, ils peuvent évoluer très fortement. Quelles méthodes d'estimation utiliser alors pour éviter l'instabilité des  $\beta$  ? Quelle période considérer ? L'une des solutions la plus intéressante est l'utilisation du filtre de Kalman (dont l'étude dépasse le cadre de ce cours) permettant de calibrer des  $\beta$  très réactifs : cette technique permet de s'exonérer de l'inertie propre au Moindres Carrés Ordinaires. Nous renvoyons à la section 3.3 pour des précisions sur les techniques de régression.

Le second problème est la significativité possible de  $\alpha_i$ . Théoriquement, le CAPM implique l'absence d'Opportunité d'Arbitrage (AOA) entre les actifs, c'est-à-dire qu'en théorie la relation (1.1) est toujours vérifiée. Si cela n'est pas le cas, l'actif est mal évalué et selon l'HEM, l'anomalie sera résorbée rapidement par les arbitrageurs et ne devrait pas perdurer. Néanmoins, dans la réalité, des  $\alpha_i$  significativement non nul perdurent plus longtemps que prévu par l'HEM. Cela peut alors signifier deux choses :

- Soit le modèle n'est pas à remettre en cause et alors la prime de risque observée, assimilée au coût du capital moins le taux sans risque,  $\rho_i^{\text{obs}}$  est arbitrageable mais les arbitrageurs de la théorie ne sont pas aussi efficaces que prévu. Alors une rentabilité *gratuite* apparaît dans le cas où  $\alpha_i$  est par exemple positif :  $\rho_i^{\text{obs}} = \alpha_i + \rho_i^{\text{th}} \Leftrightarrow \rho_i^{\text{th}} = \rho_i^{\text{obs}} - \alpha_i$ . Le modèle est supposé bon, donc la prime de risque *ex-ante*  $\rho_i^{\text{obs}}$  devrait diminuer pour atteindre la prime de risque théorique  $\rho_i^{\text{th}}$  et donc le prix de l'action augmenter. L'action est bien sous-évaluée. Le marché est alors inefficace pour l'actif  $i$  considéré. La rentabilité sera élevée puisque une partie *gratuite*  $\alpha_i$  est présente.
- Soit la prime de risque n'est pas entièrement décrite par sa seule sensibilité au portefeuille de marché. D'autres facteurs de risque sont certainement évalués par les intervenants des marchés. Fama et French ont ainsi proposé un modèle d'équilibre plus réaliste complétant le CAPM des autres facteurs de risque pouvant être rémunérés par la prime de risque.

#### Conseil pratique de gestion

*Le CAPM introduit la gestion stylisée : en effet, un gérant peut segmenter sa gestion suivant la sensibilité des actions au portefeuille de marché. Il pourra ainsi créer un portefeuille d'actions défensives, c'est-à-dire à  $\beta$  inférieurs à 1, et un portefeuille d'actions offensives, à  $\beta$  supérieurs à 1.*

*En outre, le fait de déterminer des anomalies au CAPM, via des  $\alpha$  non nuls, peut lui permettre de faire un stock picking plus efficace en sélectionnant des valeurs dont la prime de risque est sous-évaluée par le CAPM et donc par le marché (en supposant que les comportements de ce dernier sont bien décrits par le CAPM).*

### Modèle de Fama-French

Le modèle de Fama et French [14] développé en 1993 correspond à un raffinement du Capital Asset Pricing Model. Il explique la rentabilité espérée d'un portefeuille ou d'une action  $\mathbb{E}(r_i)$  en excès du taux d'intérêt sans risque  $r_f$  par la sensibilité de sa rentabilité à l'espérance de trois facteurs de risque non diversifiables :

1. la rentabilité en excès d'un portefeuille de marché  $R_M - r_f$  (correspondant au facteur de risque du CAPM),
2. la différence entre la rentabilité d'un portefeuille d'actions de petite taille, la taille étant évaluée par la capitalisation boursière, et la rentabilité d'un portefeuille d'actions de grande taille (SMB, *Small Minus Big*),
3. la différence entre la rentabilité d'un portefeuille d'actions à faible valorisation, la valorisation étant évaluée par le ratio financier *book-to-market*<sup>3</sup>, ces actions sont alors caractérisées de *Value*, et la rentabilité d'un portefeuille d'actions à importante valorisation financière, ces actions sont alors caractérisées de *Growth* (HML, *High Minus Low*).

Formellement, nous avons l'expression de la prime de risque suivante :

$$\rho_i = \mathbb{E}(R_i) - r_f = \beta_i(\mathbb{E}(R_M) - r_f) + s_i\text{SMB} + h_i\text{HML}$$

Le modèle de régression correspondant s'écrit :

$$\rho_i = R_i - r_f = \alpha_i + \beta_i(R_M - r_f) + s_i\text{SMB} + h_i\text{HML} + \varepsilon_i$$

Les facteurs sont déterminés empiriquement de manière à éviter l'overlapping. Dans ce but, il va falloir construire six portefeuilles :

	< Médiane Capitalisation	≥ Médiane Capitalisation
≥ décile 70% book-to-market	Small Value	Big Value
	Small Neutral	Big Neutral
< décile 30% book-to-market	Small Growth	Big Growth

TABLE 1.1 – Six portefeuilles Fama-French

Ainsi, nous pouvons calculer les rentabilités des portefeuilles SMB et HML à partir de celles de ces six portefeuilles :

$$\begin{aligned} \text{SMB} = & \frac{1}{3}(\text{Small Value} + \text{Small Neutral} + \text{Small Growth}) \\ & - \frac{1}{3}(\text{Big Value} + \text{Big Neutral} + \text{Big Growth}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{HML} = & \frac{1}{2}(\text{Small Value} + \text{Big Value}) \\ & - \frac{1}{2}(\text{Small Growth} + \text{Big Growth}) \end{aligned}$$

Ce modèle parvient empiriquement à expliquer, souvent entièrement, la prime de risque d'un portefeuille. Il améliore donc le CAPM. Néanmoins, dans certaines situations, il est possible de créer des portefeuilles dont les primes de risque échappent à l'explication du modèle de Fama-French : il reste alors encore un  $\alpha_i$  significatif. De la même manière que pour le CAPM, cette anomalie peut signifier une inefficience d'évaluation de l'actif ou une remise en cause du modèle. Dans ce dernier cas, Carhart [8] a ainsi développé un

3. Les actions à faible valorisation financière sont alors celles ayant un fort *book-to-market*.

modèle d'évaluation incorporant le momentum de prix d'un actif (cette *anomalie* célèbre sera exposée plus précisément dans la section 3.3.1).

Pour terminer cette section sur les modèles à facteurs, nous allons étudier dans la suite un modèle d'évaluation s'exonérant de l'hypothèse d'AOA du CAPM : le Modèle d'Évaluation par Arbitrage ou Asset Pricing Theory (APT).

#### **Conseil pratique de gestion**

*Le modèle de Fama-French enrichit la gestion stylisée en ajoutant deux segmentations supplémentaires des actions, en plus du  $\beta$ , très utilisées en pratique : la gestion par capitalisation et celle suivant la valorisation des actions.*

*Des portefeuilles d'actions vont ainsi être formés suivant la capitalisation en distinguant les petites capitalisations (Small Cap) et les grandes capitalisations (Large Cap).*

*La valorisation va aussi distinguer les actions matures ou de rendement (Value) faisant partie de secteurs dont la croissance future est relativement faible mais les dividendes distribués élevés, et les actions de croissance (Growth), de secteurs dont l'espérance de rendement futur est important.*

### Asset Pricing Theory

Ross [32] en 1976 proposa un modèle d'évaluation des actifs s'affranchissant des hypothèses de normalité et de mesure du portefeuille de marché des modèles précédents. Ce modèle contrairement au CAPM s'appuie sur mais n'implique pas l'Absence d'Opportunité d'Arbitrage (AOA). C'est donc une autre approche de l'évaluation des actifs, complémentaire.

Le modèle lie formellement l'espérance de la rentabilité d'un titre ou d'un portefeuille  $i$   $R_i$  à  $m$  facteurs de risque systématiques de prime de risque pour chaque facteur  $j$   $\mathbb{E}(R_j) - r_f$  :

$$\mathbb{E}(R_i) = r_f + \sum_{j=1}^m \beta_{ij}(\mathbb{E}(R_j) - r_f)$$

Les facteurs sont non corrélés entre eux et le modèle statistique fait apparaître le risque idiosyncratique  $\varepsilon_i$  :

$$\rho_i = R_i - r_f = \sum_{j=1}^m \beta_{ij}(R_j - r_f) + \varepsilon_i$$

Le problème est alors de définir les facteurs communs. Deux façons peuvent être évoquées : celle exogène, explicitant des facteurs macro-économiques ou financiers a priori, et celle endogène extrayant des facteurs inobservables ou latents.

La première est celle par exemple d'organismes financiers comme BARRA. Le souci est alors l'hypothèse de non-corrélation entre les facteurs : pour résoudre cela, des méthodes statistiques, comme l'Analyse en Composantes Principales (ACP) sur les facteurs exogènes, peuvent être alors mises en oeuvre.

La seconde utilise directement les méthodes statistiques comme l'ACP sur l'univers des titres pour en extraire les facteurs communs. A la différence des autres modèles étudiés précédemment, les facteurs de risque sont alors implicites ou latents.

#### *L'Analyse en Composantes Principales en théorie*

Nous allons présenter ici de manière formelle l'ACP. Rappelons tout d'abord les développements originels de cette méthode pour comprendre ainsi l'intérêt de l'utilisation de cet outil pour évaluer les actifs financiers. Cet outil statistique s'est développé grâce à la psychométrie. En effet, dans ce domaine, les variables explicatives (contrairement à l'économétrie) sont rares ; mettre des chiffres derrière le comportement d'un individu subjectif n'est pas chose aisée. Pour résoudre ce problème et tout de même construire des modèles mathématiques, on suppose que le comportement d'un individu est régi par des facteurs quantitatifs latents mais difficilement observables. C'est précisément l'objectif de l'APT : il est difficile de quantifier les comportements financiers évaluant les actifs et l'alternative est donc d'utiliser des facteurs statistiques. L'objectif essentiel de l'Analyse en Composantes Principales (ACP) est d'expliquer les corrélations entre un nombre élevé de variables quantitatives par un nombre plus restreint de facteurs latents ou composantes principales, qui représentent des variables inobservables (cf. [21] et [25]). L'ACP consiste donc à transformer les  $p$  variables d'origine  $x_1, \dots, x_p$  en  $p$  nouvelles variables  $f_1, \dots, f_p$  (les composantes principales) de variance maximale, non corrélées deux à deux et qui s'expriment comme combinaison linéaire des variables d'origine.

Soit  $x$  le vecteur composé des  $p$  variables d'étude de la population considérée. Nous travaillons sur les données  $x$  que nous centrons et qui ont pour matrice de variance-covariance  $\Sigma$ .

La méthode de l'ACP consiste à diagonaliser  $\Sigma$ . Nous obtenons alors  $\Sigma = \Phi \Lambda \Phi'$  avec  $\Phi$  la matrice carrée composée des  $p$  vecteurs propres  $\phi_j$  (en colonne) et  $\Lambda$  la matrice diagonale des  $p$  valeurs propres  $\lambda_j$ .

L'objectif est de classer les  $p$  différentes valeurs propres suivant leur ordre de grandeur : le vecteur propre  $\phi_1$  associé à la plus grande valeur propre  $\lambda_1$  permet alors de construire la première composante principale captant la plus importante variabilité.

Les composantes principales (CP) sont données par :

$$f = \Phi'x$$

où  $f$  est le vecteur des  $p$  facteurs latents ou composantes principales  $f_i$ . La variance de la CP  $i$  est égale à la valeur propre  $i$ .

Nous obtenons au final le modèle factoriel suivant :

$$x = \Phi f$$

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \phi_{11} & \dots & \phi_{1p} \\ \vdots & & \vdots \\ \phi_{p1} & \dots & \phi_{pp} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_p \end{bmatrix}$$

Pour chaque variable, nous avons :

$$x_i = \sum_{j=1}^p \phi_{ij} f_j \quad i = 1, \dots, p$$

Les  $\phi_{ij}$  représentent aussi ce que nous appellerons les *factor loadings*. Représenter ces derniers en fonction des variables d'origine ou représenter les composantes principales revient aux mêmes types d'interprétation. Par souci de parcimonie, nous n'allons conserver que les  $k$  premiers facteurs avec  $k < p$  et nous supposons que pour chaque variable, nous avons :

$$x_i = \sum_{j=1}^k \phi_{ij} f_j + \varepsilon_i \quad i = 1, \dots, p \quad (1.2)$$

avec  $\varepsilon_i = \sum_{j=k+1}^p \phi_{ij} f_j$  les résidus négligeables.

Ceci nous permet de réduire l'ensemble des données à un ensemble plus restreint de facteurs représentant au mieux leur variabilité.

#### Limites de l'APT

La seule contrainte dans l'APT est donc la linéarité entre la rentabilité d'un actif et les facteurs de risques systématiques non corrélés entre eux. Néanmoins, plusieurs problèmes apparaissent dans la mise en place de cette méthode d'évaluation.

D'une part, cette méthode n'implique pas l'AOA et donc est plus limitée que le CAPM pour fournir un cadre d'analyse à la présence ou non d'arbitrages.

En outre, les facteurs communs sont souvent très difficiles à interpréter car inobservables. Régulièrement, l'ACP va extraire plusieurs facteurs latents dont l'interprétation est seulement aisée pour le premier facteur, alors assimilable au portefeuille de marché dans le CAPM : la variabilité des titres de l'univers est en premier lieu relative à un facteur commun à tous les titres représentant la *moyenne* du marché. En effet, dans l'ACP, le premier facteur est souvent un facteur de niveau déterminant une moyenne pondérée de tous les actifs. L'objectif de l'APT de s'exonérer du portefeuille de marché ne semble donc pas atteint.

Dans la pratique, l'APT peut être utilisée dans la détermination de facteurs communs parcimonieux mais ne supplante pas le CAPM, malgré ses hypothèses irréalistes, car ce dernier propose, contrairement à l'APT, un cadre d'analyse de l'équilibre rigoureux.

#### Conseil pratique de gestion

*L'APT est d'un intérêt pratique moins évident que les autres modèles à facteurs. Les facteurs inobservables ne permettront pas de styliser la gestion mais seront utiles pour essayer de diversifier le portefeuille et ne pas investir toute sa richesse sur un seul facteur de risque.*

*Ce souci de diversification sera précisé dans la partie sur l'allocation et nous verrons que l'APT pourra être utile dans la détermination de matrices de variance-covariance des actifs ayant de bonnes propriétés mathématiques.*

### 1.2.3 Mesure synthétique du risque

Les modèles à facteurs de risque que nous venons d'étudier ont un intérêt essentiel pour décrire les sensibilités d'un actif financier ou d'un portefeuille à un (CAPM) ou trois facteurs de risque (Fama-French). L'inconvénient est la difficulté de ces modèles à apprécier le risque global d'un portefeuille composé d'actifs hétérogènes, n'ayant par exemple pas le même portefeuille de marché : dans ce cas, il est très difficile d'agréger les différentes sensibilités. Il est alors préférable de déterminer une mesure synthétisant le risque global du portefeuille. Cette mesure synthétique sera alors issue de la distribution des rentabilités<sup>4</sup> du portefeuille. L'une de ces mesures, très usitée par les praticiens, est la volatilité.

#### La volatilité

Soit  $R$  le vecteur des rentabilités de l'actif ou du portefeuille considéré. La volatilité notée  $\sigma$  correspond à l'écart-type de ces rentabilités :

$$\sigma = \sqrt{\mathbb{E}[(R - \mathbb{E}(R))^2]}$$

Avant d'évaluer ce critère, il faut préciser une spécificité de calcul. Nous observerons dans la suite les évolutions des rentabilités d'indices boursiers de périodicité hebdomadaire<sup>5</sup>. Il nous faut pouvoir les comparer à des volatilités calculées sur des périodicités différentes, puisque la volatilité augmente avec l'intervalle de temps noté  $\Delta$  défini entre les rentabilités.

Ces dernières sont calculées de la manière suivante. Soit  $V_t^P$  la valeur en  $t$  du portefeuille et  $V_{t+\Delta}^P$  la valeur en  $t + \Delta$ , alors la rentabilité du portefeuille  $R_{t|t+\Delta}^P$  calculée sur l'intervalle de temps  $\Delta$  est égale à :

$$R_{t|t+\Delta}^P = \frac{V_{t+\Delta}^P}{V_t^P} - 1.$$

Ainsi, intuitivement, nous pouvons vérifier, comme annoncé plus haut, que plus l'intervalle de temps va augmenter, plus les rentabilités auront une valeur absolue importante et donc la volatilité va croître.

Sous l'hypothèse de normalité et d'indépendance des rentabilités, nous pouvons calculer une volatilité annuelle à partir de n'importe quelle périodicité : il suffit de multiplier la volatilité par un facteur égal à la racine carrée de l'inverse de l'intervalle de temps  $\Delta$  considéré.

Ce dernier vaut suivant les périodicités :

Périodicité	$\Delta$	Facteur
Quotidienne	$\frac{1}{261}$	$\sqrt{261}$
Hebdomadaire	$\frac{1}{52}$	$\sqrt{52}$
Mensuelle	$\frac{1}{12}$	$\sqrt{12}$

TABLE 1.2 – Facteur multiplicatif suivant la périodicité

Le facteur appliqué à la périodicité quotidienne est différent suivant la zone géographique considérée : en effet, le nombre de jours fériés, et donc non tradés, diffère suivant le pays.

4. Nous expliquerons l'intérêt d'utiliser les rentabilités dans la section 1.3.1.

5. Cette périodicité est la plus intéressante car les données quotidiennes possèdent trop de bruit et celles mensuelles ne sont pas assez représentatives de la dispersion réelle des rentabilités car elles sont alors démesurément lissées.

Un simple exemple va nous permettre d'appréhender l'intérêt de cette mesure. Observons sur un même graphique les évolutions entre le 8 janvier 1999 et le 8 juin 2007 de l'indice européen MSCI Europe et du taux d'intérêt Euribor 3 mois, ainsi que de leurs rentabilités hebdomadaires.

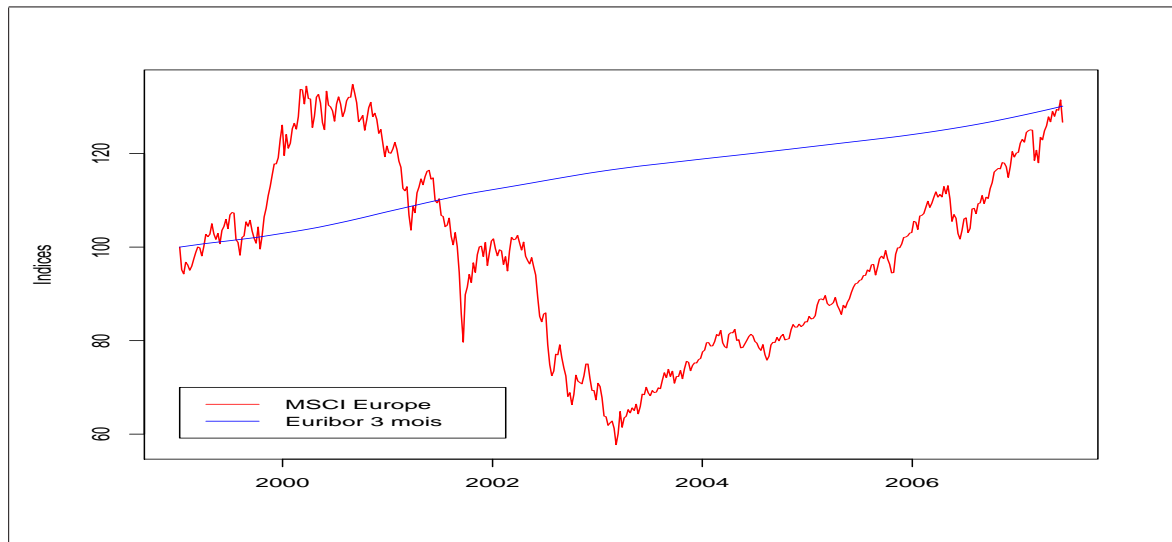


FIGURE 1.1 – Évolutions des indices du MSCI Europe et de l'Euribor 3 mois

Nous remarquons sur les Figures 1.1 et 1.2 que la variation des indices et la dispersion des rentabilités sont plus importantes pour le MSCI Europe que pour l'Euribor 3 mois. Ceci va donc se répercuter automatiquement sur l'indicateur statistique de dispersion que représente la volatilité.

En effet, la volatilité annualisée du MSCI Europe sur la période observée est de 16.99% et celle de l'Euribor 3 mois de 0.12%. Il ne fait alors aucun doute que le MSCI Europe est plus risqué que l'Euribor 3 mois. Cette conclusion aurait pu être tirée de la connaissance de ces deux indices : en effet, le MSCI Europe est composé d'actions alors que l'Euribor 3 mois est un taux d'intérêt ayant un risque quasi-nul de perte. Etant donné qu'un portefeuille d'actions peut subir des pertes potentielles importantes contrairement à l'Euribor 3 mois, il était évident que l'on aboutisse à la conclusion précédente. Mais la volatilité a permis de quantifier la différence de risque de perte des deux indices. A l'aide de cet indicateur synthétique, nous pouvons donc hiérarchiser les deux indices et déterminer leur niveau de risque de pertes potentielles. Ceci aurait été difficile à réaliser avec le CAPM par exemple et sa sensibilité  $\beta$  : quel portefeuille de marché commun à ces deux indices ? Et quand bien même ce portefeuille de marché aurait été défini, aurait-on été certain des présupposés théoriques du CAPM ? En effet, d'autres facteurs de risque omis n'auraient-ils pas été évalués dans la prime de risque ? La volatilité calibrée sur les données historiques évite ces problèmes de modèle.

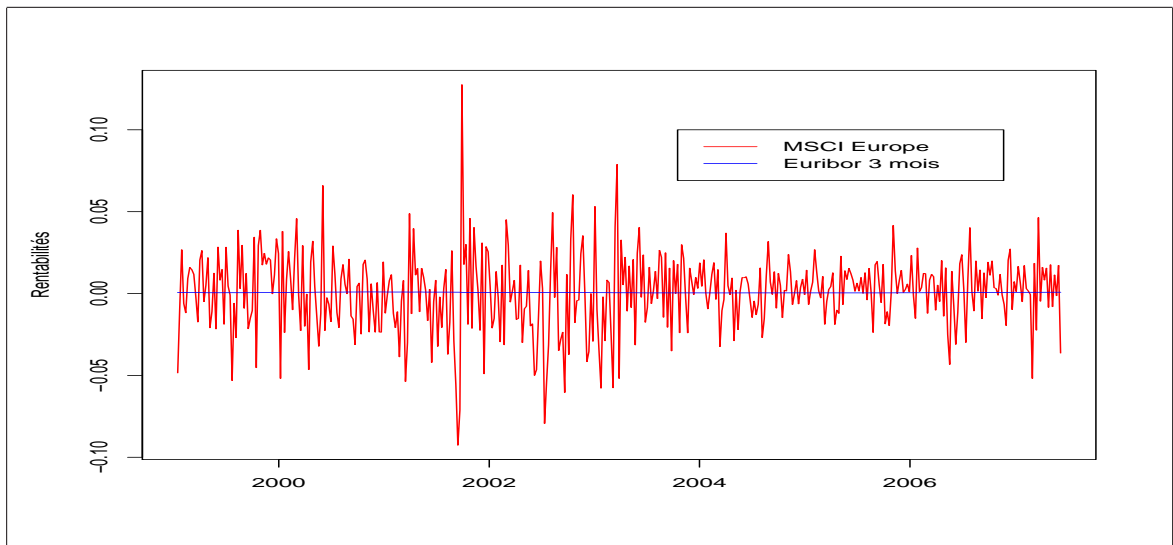


FIGURE 1.2 – Évolutions des rentabilités du MSCI Europe et de l'Euribor 3 mois

Néanmoins, elle n'est pas exempte de tout inconvénient. Effectivement, lorsque les données viennent à manquer, il va devenir difficile de calculer une volatilité robuste. Il va falloir alors modéliser les rentabilités des actifs considérés à l'aide d'une loi de probabilité (la loi Normale par exemple) ou d'un modèle statistique (ARMA-GARCH par exemple). Si nous souhaitons créer un produit financier n'ayant pas encore d'existence et dont nous voulons évaluer le risque, il va falloir le modéliser pour en déterminer la volatilité. Le risque de ne pas utiliser un modèle adéquat entre alors en jeu.

Enfin, un dernier défaut est révélé par la Figure 1.3.

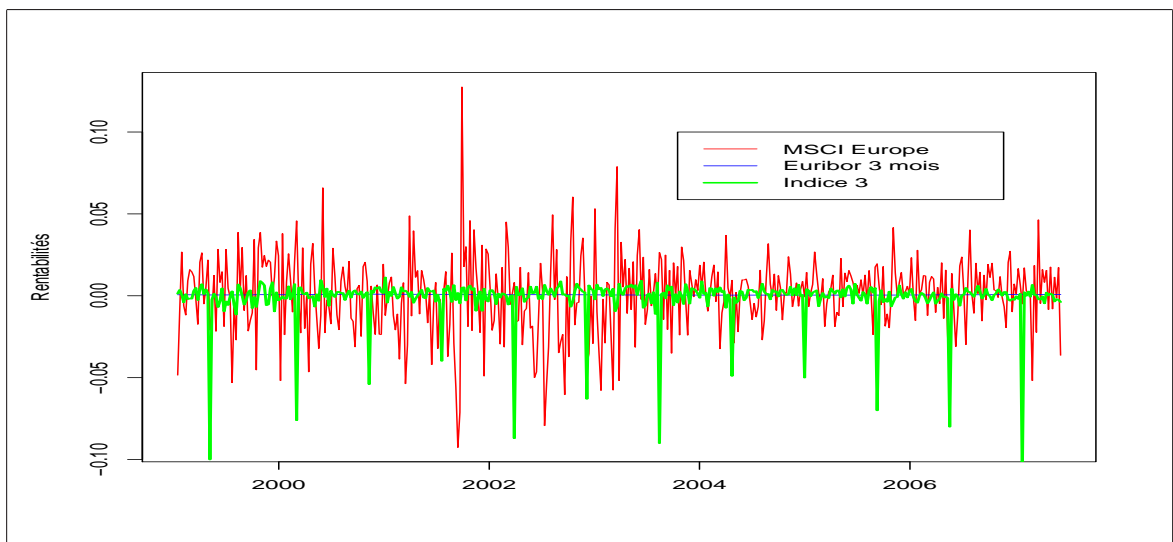


FIGURE 1.3 – Évolutions des rentabilités du MSCI Europe, de l'Euribor 3 mois et de l'indice 3

Nous pouvons observer à nouveau les évolutions des rentabilités du MSCI Europe et de l'Euribor 3 mois mais aussi d'un actif dont la dispersion est plus originale. Les volatilités nous feraient conclure à un risque plus élevé de pertes pour le MSCI Europe car la volatilité annualisée de l'Indice 3 est plus faible et vaut 9,38%. Or il est évident à partir de la Figure 1.3 qu'investir dans l'Indice 3 est plus dangereux car des

pertes très fortes peuvent apparaître avec une probabilité significative.

Nous observons aussi ces caractéristiques à partir du graphe des distributions empiriques des deux indices financiers MSCI Europe et Indice 3 de la Figure 1.4. Nous avons déterminé, au lieu des histogrammes, les densités estimées non-paramétriquement par un noyau gaussien. Ainsi, la queue des pertes est plus épaisse pour l'indice 3 ce qui est un inconvénient lorsque l'on détermine le risque par la seule volatilité qui est un indicateur du risque moyen et ne capte donc pas cela.

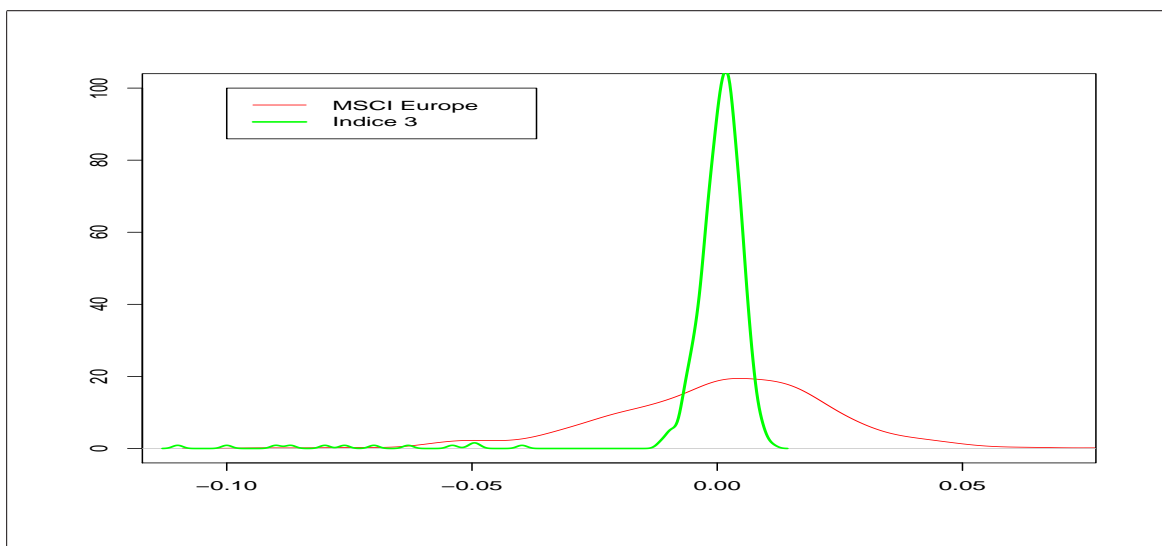


FIGURE 1.4 – Densités des rentabilités du MSCI Europe et de l'indice 3

Cet inconvénient va nous permettre de créer une autre mesure synthétique du risque pouvant hiérarchiser les 3 indices plus correctement, c'est-à-dire reconnaissant dans l'indice 3 l'actif financier le plus risqué en termes de pertes potentielles. Cette mesure est le quantile de perte maximale que peut subir l'actif ou le portefeuille avec une probabilité d'occurrence faible mais non négligeable pour l'investisseur : on la dénomme la Value-at-Risk ou VaR. Ainsi, pour nos trois indices, nous avons les VaR suivantes définies avec une probabilité à 1% en comparaison des volatilités annualisées :

Indice	Volatilité annualisée	VaR 1%
Euribor 3 mois	0.12%	0.04%
MSCI Europe	16.99%	-5.77%
Indice 3	9.38%	-7.85%

TABLE 1.3 – Volatilités et VaR des trois indices

Cela prouve bien que la VaR détermine une hiérarchie correcte du risque de pertes d'un actif financier, contrairement à la volatilité.

### La Value-at-Risk

La VaR représente une perte potentielle dont il faut définir la **probabilité**  $\alpha$  d'occurrence, appelée aussi niveau de confiance, ainsi que l'**horizon**  $h$  de durée d'investissement. Par exemple, une probabilité de 1% pour un horizon  $h$  de un jour revient à accepter que la perte potentielle ne dépasse la VaR que 2 à 3 fois par an (1 an = 251 jours ouvrés). L'horizon représente la durée sur laquelle nous estimons le risque, c'est-à-dire le temps nécessaire pour couvrir la position du portefeuille : 1 jour en trading, 1 mois en gestion.

Soit  $V_t^P$  la valeur en  $t$  du portefeuille et  $V_{t+h}^P$  la valeur à l'horizon  $h$ . La rentabilité du portefeuille  $R_{t|t+h}^P$  investi à la date  $t$  et détenu sur un horizon de durée  $h$  a pour expression  $\forall t \geq 1$  :

$$R_{t|t+h}^P = \frac{V_{t+h}^P}{V_t^P} - 1.$$

Supposons que  $R_{t|t+h}^P$  est issu d'une variable aléatoire notée  $R^P$ . La  $\text{VaR}(h, \alpha)$  est alors définie par :

$$\mathbb{P}[R^P \leq \text{VaR}(h, \alpha)] = \alpha$$

c'est-à-dire la probabilité que la rentabilité du portefeuille soit inférieure à la VaR sur un horizon  $h$  est égale à  $\alpha$ <sup>6</sup>.

Notons  $F$  la fonction de répartition de la variable aléatoire  $R^P$  des rentabilités du portefeuille de périodicité  $h$ . La Value-at-Risk de probabilité d'occurrence  $\alpha$  et d'horizon d'investissement  $h$  est alors le quantile défini par :

$$\text{VaR}(h, \alpha) = F^{-1}(\alpha) \tag{1.3}$$

Il nous reste alors à caractériser la forme de  $F$ . De nombreuses formulations sont possibles. Nous nous intéresserons seulement aux plus classiques malgré leurs limites.

La première solution consiste à estimer  $F$  par sa distribution empirique : nous obtenons la VaR historique. Nous estimons alors  $F$  non-paramétriquement par sa distribution empirique  $\hat{F}$ . Supposons que nous disposons d'un historique de  $T$  observations des rentabilités. La distribution empirique  $\hat{F}$  des rentabilités du portefeuille est alors caractérisée à partir du vecteur  $(\hat{R}_{1|1+h}^P, \dots, \hat{R}_{T|T+h}^P)'$  et  $\hat{F}^{-1}(\alpha)$  correspond au quantile de probabilité  $\alpha$  de  $(\hat{R}_{1|1+h}^P, \dots, \hat{R}_{T|T+h}^P)'$ .

L'avantage de cette méthode est donc de ne pas imposer d'hypothèse sur la loi de distribution des rentabilités. Mais le problème qui se pose est la longueur  $T$  de l'historique qui, si elle est trop faible, ne fournit pas un calcul précis de la VaR. Nous pouvons alors utiliser la technique du ré-échantillonnage ou *bootstrap* (cf. Efron [11]).

Nous construisons pour cela une version aléatoire de même taille du vecteur  $(\hat{R}_{1|1+h}^P, \dots, \hat{R}_{T|T+h}^P)'$  dans laquelle les rentabilités du portefeuille peuvent apparaître pour certaines aucune fois, pour d'autres une fois, pour d'autres encore deux fois, etc. Ce nouveau vecteur est une version ré-échantillonnée ou *bootstrap* du vecteur d'origine. Nous pouvons alors déterminer la VaR historique de cet échantillon. Nous réalisons  $B$  répliques *bootstrap* et la VaR historique *bootstrap* correspond à la moyenne des  $B$  VaR historiques.

L'inconvénient d'une VaR historique est aussi l'*over-fitting* ou encore la dépendance trop forte à l'échantillon sur lequel elle a été déterminée, et donc la difficulté de cette VaR à être robuste dans le temps.

Pour résoudre cela, nous allons proposer une deuxième solution ajustant sur les rentabilités un modèle statistique : on parle alors de VaR paramétrique. De manière classique, le choix du modèle paramétrique se porte sur la loi Normale. Supposons donc que les rentabilités du portefeuille  $R_{t|t+h}^P$  sont issues d'une variable aléatoire gaussienne : ainsi,  $F$  est définie par  $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$  avec  $\mu$  l'espérance des rentabilités et  $\sigma^2$  la variance des rentabilités.

6. Les praticiens peuvent aussi définir le niveau de confiance par  $1 - \alpha$  qui correspond de même au quantile de probabilité  $\alpha$  : ainsi, une VaR à 99% par exemple correspond au quantile de probabilité  $\alpha = 1 - 99\% = 1\%$ .

Nous obtenons ainsi à partir de l'équation (1.3) :

$$\Phi\left(\frac{\text{VaR}(h, \alpha) - \mu}{\sigma}\right) = \alpha$$

avec  $\Phi$  la fonction de répartition de la loi Normale centrée réduite. Nous avons donc :

$$\text{VaR}(h, \alpha) = \mu + \sigma\Phi^{-1}(\alpha)$$

Nous n'allons pas développer d'autres modélisations dans ce cours mais il nous paraît intéressant d'introduire les limites de la modélisation gaussienne. En effet, cette méthode repose sur des hypothèses irréalistes pour modéliser les rentabilités des actifs financiers puisque trois faits stylisés caractérisent leur distribution et ne sont pas captés par la modélisation gaussienne :

1. l'asymétrie : l'occurrence de pertes extrêmes est plus forte que celle de profits extrêmes,
2. les queues épaisses,
3. le clustering : par exemple, les rentabilités élevées en valeur absolue sont suivies par des rentabilités élevées en valeur absolue.

Les deux premiers faits stylisés peuvent s'observer sur la Figure 1.5 à l'aide des QQ-plot et densité de la queue des pertes de l'indice de marché français CAC 40 relativement à la loi Normale. Le troisième est révélé par les grappes de volatilité de la Figure 1.2.

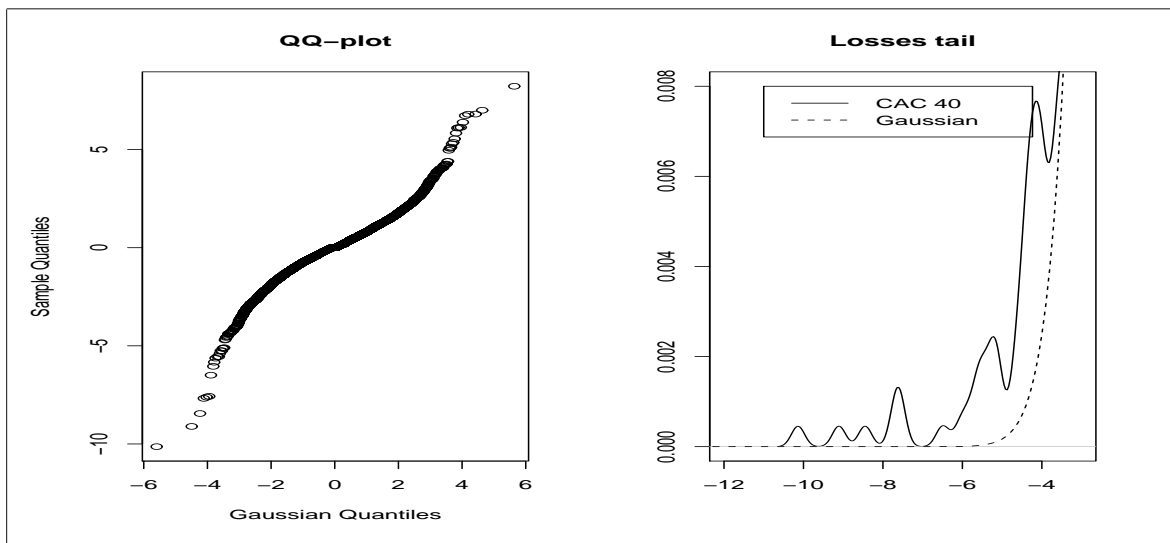


FIGURE 1.5 – QQ-plot et distribution de la queue des pertes du CAC 40 relativement à la loi Normale

Nous terminons cette section sur la VaR par les techniques pour évaluer sa justesse. L'évaluation d'une VaR peut se faire de deux manières :

- ex-ante, à travers les tests d'adéquation statistiques des modélisations adaptées aux rentabilités financières (dans le cas de VaR paramétriques),
- ex-post, via les backtests : pour les réaliser, nous calculons la VaR sur un échantillon d'apprentissage et nous déterminons le nombre d'*exceptions* (rentabilités inférieures à la VaR) sur l'échantillon de backtest. Pour que la VaR soit adéquate aux données de marché, il faut que le pourcentage d'exceptions soit proche du niveau  $\alpha$  de la VaR.

**Conseil pratique de gestion**

*La volatilité et la VaR sont les deux mesures synthétiques du risque les plus utilisées en gestion. Un gérant pourra ainsi déterminer le risque global de variation de son portefeuille et le comparer très rapidement aux portefeuilles concurrents ayant un style de gestion par exemple similaire.*

*En outre, un gérant pourra aussi distinguer dans son portefeuille les différentes contributions des actifs à la volatilité ou VaR globales du portefeuille. Il pourra ainsi peut-être supprimer un actif dont la contribution au risque global est trop forte.*

## 1.3 Mesurer la performance d'investissement

Outre le risque essentiel à estimer et quantifier, il faut aussi, lorsque l'on réalise un investissement, mesurer sa performance : en fait ceci est ce qui intéresse en premier lieu tout investisseur. Mais comment mesurer cette performance ?

### 1.3.1 Une première mesure synthétique

#### Performance d'un indice actions

Observons sur la Figure 1.6 l'évolution mensuelle de l'indice américain Standard & Poor's entre décembre 1927 et juillet 2007.

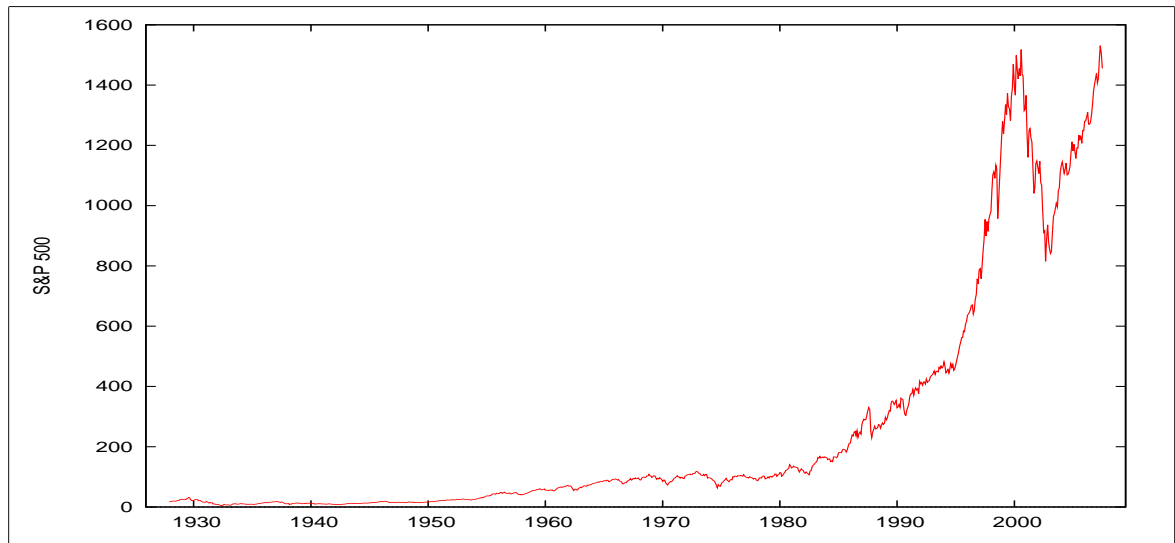


FIGURE 1.6 – Évolution de l'indice S&P 500

Fin décembre 1927, cet indice a une valeur de 17.66 et termine fin juillet 2007 à 1455.27, où il commence sa baisse avec la crise des subprimes. Si un investisseur avait placé 1 dollar dans cet indice en décembre 1927, il aurait accumulé jusqu'en juillet 2007  $1455.27/17.66 = 82.40$  dollars : il aurait donc multiplié sa richesse initiale par 82.40. Nous pouvons considérer un autre chiffre plus utilisé décrivant non plus la multiplication du capital initial mais la richesse relative ajoutée à la richesse initiale (et non pas la seule différence de richesse, mesure absolue, qui sera d'autant plus importante que la richesse initiale est élevée). Ici ce chiffre serait égal à  $(82.40 - 1)/1 = 8140\%$ . Il correspond en fait à la rentabilité de l'investissement de 1 dollar en décembre 1927. Nous pouvons donc conclure à nouveau à l'aide de ce chiffre à une performance importante de l'investissement.

Formellement, si nous notons  $W_0$  la richesse initiale et  $W_T$  la richesse finale, la rentabilité  $R$  est égale à :

$$R = \frac{W_T - W_0}{W_0} = \frac{W_T}{W_0} - 1$$

Cette expression est appelée rentabilité arithmétique. Lorsque la rentabilité arithmétique est faible et proche de 0 (ceci est le cas lorsque les données sont de périodicité courte, comme des données quotidiennes), ce qui revient à ce que le quotient  $\frac{W_T}{W_0}$  soit proche de 1, nous pouvons utiliser la rentabilité logarithmique, appelée aussi log-rentabilité ou encore rentabilité géométrique. En effet, nous avons à partir d'un développement limité à l'ordre 1 l'approximation suivante :

$$\ln \frac{W_T}{W_0} \approx \frac{W_T}{W_0} - 1 = R \quad \text{pour} \quad \frac{W_T}{W_0} \rightarrow 1$$

Néanmoins, l'inconvénient des log-rentabilités est le fait que la log-rentabilité d'un portefeuille n'est pas égale à la somme des log-rentabilités des actifs le composant, contrairement à la rentabilité arithmétique.

Enfin, nous avons réduit le taux de rentabilité d'un titre au taux de gain en capital. Or il faudrait y ajouter le taux de rémunération du titre défini par le *dividend yield*, rapport dividendes sur prix, ce qui donne l'expression réelle de la rentabilité  $R'$  suivante :

$$R' = \frac{W_T - W_0 + D}{W_0} = R + \frac{D}{W_0}$$

avec  $D$  les dividendes sur la période d'investissement.

Or le *dividend yield* peut être considéré comme négligeable par rapport au taux de gain en capital pour des périodicités courtes ; c'est pour cela que l'on réduit souvent la rentabilité à ce seul taux.

### Justification statistique de l'utilisation de la rentabilité

Ce paragraphe intéressera les étudiants ayant des connaissances en statistiques élaborées.

La justification de l'utilisation de la rentabilité peut se faire aussi de manière statistique. En effet, étudions la série temporelle de l'indice S&P 500. Nous y appliquons au préalable la transformation de Box-Cox et plus particulièrement celle du logarithme, dans le but de *stabiliser* la variance des données. Nous pouvons conclure tout de même à la non-stationnarité de l'indice américain. En effet :

1. la Figure 1.7 révèle une tendance globale à la hausse,
2. elle révèle aussi la décroissance lente des autocorrélations significativement non nulles de la série temporelle des valeurs du S&P 500,
3. et enfin le test statistique de Dickey-Fuller augmenté conclue à la présence d'une racine unitaire dans le processus de l'indice et donc à sa non-stationnarité. En effet, pour n'importe quel ordre de retard et pour les trois différents modèles (cf. Lardic et Mignon [23] pour plus de précisions), nous avons des p-value de test très supérieures à 0.9 : on accepte donc l'hypothèse nulle de présence de racine unitaire équivalent à la non-stationnarité du processus.

Il nous faut donc stationnariser les données en les différenciant une fois. Ces nouvelles données se révèlent alors stationnaires :

1. pas de tendance dans la série temporelle des différences premières des logarithmes du S&P 500 (cf. Figure 1.8),
2. l'autocorrélogramme de la Figure 1.8 ne révèle pas de décroissance lente des autocorrélations,
3. et le test de Dickey-Fuller augmenté ne révèle pas la présence d'une racine unitaire.

Les différences premières de la série des logarithmes du S&P 500 sont équivalentes aux log-rentabilités. Nous comprenons alors pourquoi les rentabilités seront des objets adéquats à la modélisation statistique, puisqu'elles se révèlent être stationnaires *en moyenne*.

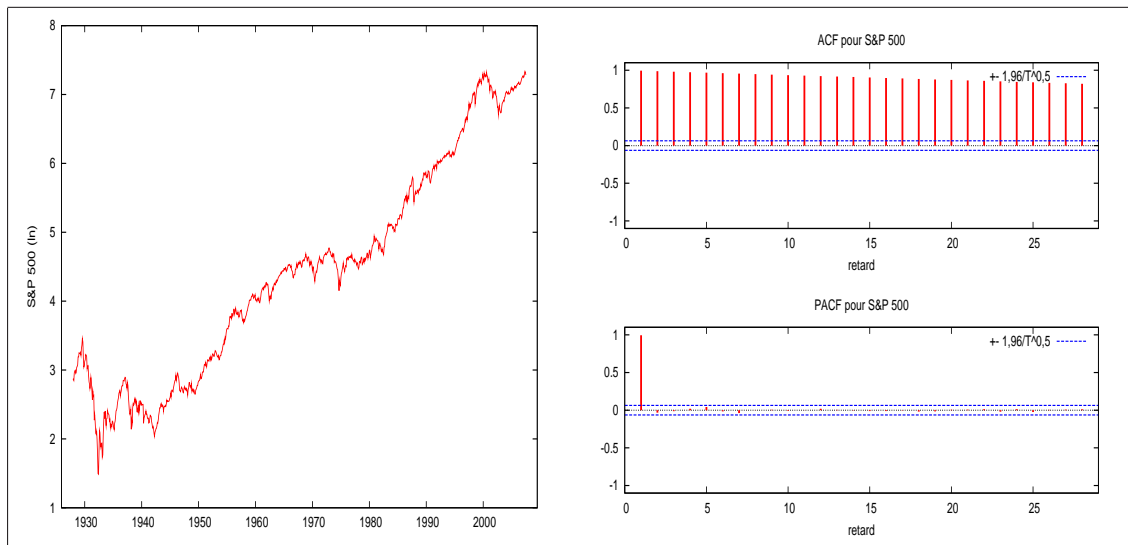


FIGURE 1.7 – Évolution de l'indice S&amp;P 500 en log et autocorrélogrammes

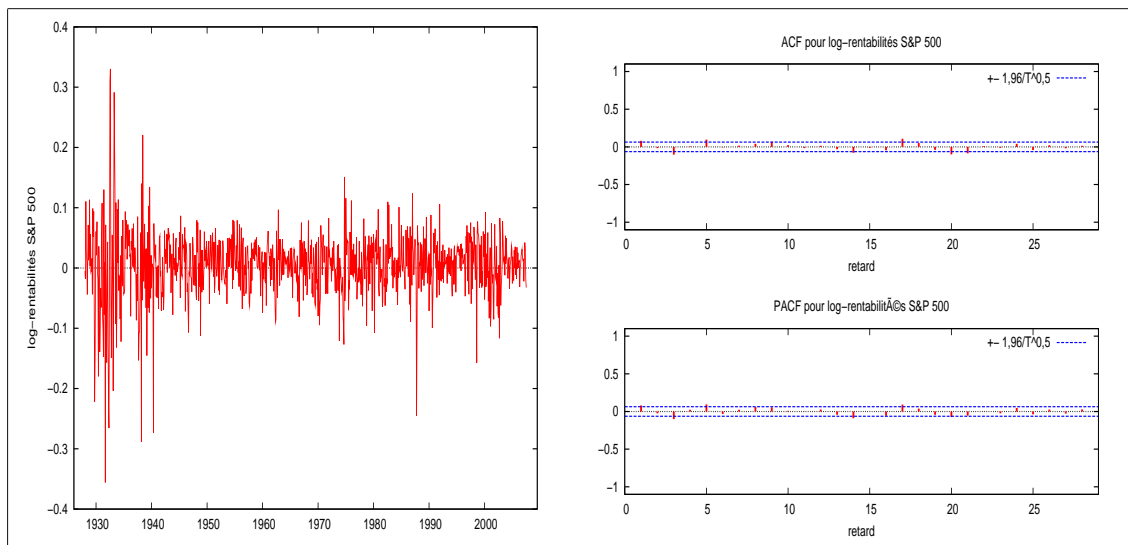


FIGURE 1.8 – Évolution des différences premières l'indice S&amp;P 500 en log et autocorrélogrammes

### 1.3.2 Mesures de rentabilité ajustée du risque

La rentabilité est donc une très bonne mesure de la performance. Mais seule elle n'est pas suffisante pour juger de la bonne ou mauvaise performance d'un investissement.

Supposons deux investissements A et B ayant au même horizon d'un an une rentabilité semblable. Néanmoins, le risque pris par l'investisseur pour l'investissement A est relativement faible (volatilité ou VaR faible) alors que celui pris par l'investisseur B est beaucoup plus élevé. Ce dernier ne va donc pas être satisfait de la performance de son investissement puisqu'il aurait pu prendre moins de risque pour le même gain avec l'investissement A.

Une judicieuse mesure de la performance doit donc prendre en compte le risque rémunéré par la rentabilité de l'investissement. C'est ainsi que nous allons utiliser des mesures de la rentabilité ajustée du risque.

Nous avons plusieurs possibilités suivant que l'investisseur mesure sa performance de manière absolue ou relative à un benchmark.

#### Mesure absolue

Ces mesures évaluent la performance sans référence à un benchmark. Nous présentons deux ratios :

1. Le ratio de Sharpe  $S_i$  pour un portefeuille  $i$ , défini par Sharpe en 1966, mesure la rémunération par l'investissement, en excès du taux sans risque  $r_f$ , d'une unité de risque, mesuré par la volatilité : 
$$S_i = \frac{\mathbb{E}(R_i) - r_f}{\sigma(R_i)}$$
. Une alternative au ratio de Sharpe peut être proposée avec le risque non plus mesuré par la volatilité mais la VaR (en rentabilité) : 
$$S'_i = \frac{\mathbb{E}(R_i) - r_f}{|\text{VaR}_i|}$$
.
2. Le ratio de Treynor mesure le rapport entre l'excès de rentabilité de l'investissement et son risque systématique déterminé par le  $\beta$  issu du CAPM : 
$$T_i = \frac{\mathbb{E}(R_i) - r_f}{\beta_i}$$
.

#### Mesure relative

Ces mesures évaluent la performance en référence à celle d'un benchmark. Nous proposons dans ce cours deux ratios :

1. L'alpha de Jensen  $\alpha_i$  pour un portefeuille  $i$ , défini par Jensen en 1968, est égal à la constante du modèle de marché :  $\alpha_i = [\mathbb{E}(R_i) - r_f] - [\beta_i(\mathbb{E}(R_B) - r_f)]$ . Cet indicateur mesure donc la part de la rentabilité non prévue par le CAPM et que l'on peut accrédi-ter à l'investisseur gérant son capital, qui, si  $\alpha_i > 0$ , a pu *battre* son benchmark de rentabilité  $R_B$ . Le ratio de Black-Treynor  $\frac{\alpha_i}{\beta_i}$  permet de comparer des investissements de benchmarks différents.
2. Le ratio d'information s'apparente à un ratio de Sharpe sur les rentabilité et risque résiduels en excès du benchmark : 
$$IR_i = \frac{\mathbb{E}(R_i) - \mathbb{E}(R_B)}{\sigma(R_i - R_B)}$$
. Le dénominateur est appelé *tracking-error volatility* et par abus de langage *tracking-error* ou TE : une valeur faible de la *tracking-error* signifie que le risque de l'investissement est proche de celui de son benchmark. L'objectif pour un gérant benchmarké est bien entendu d'avoir un  $IR$  élevé, ce qui signifie prendre des risques similaires au benchmark tout en ayant une rentabilité plus élevée. Tout le problème est de savoir si le benchmark est efficient : dans le cas contraire, le battre serait relativement aisé !

Ces différents ratios peuvent avoir des insuffisances comme le fait d'être dépendants pour certains du CAPM dont nous avons vu les limites plus haut. Néanmoins, ils restent très utilisés par les gérants pour déterminer la performance de leurs investissements.

**Conseil pratique de gestion**

*Le ratio de Sharpe et la ratio d'information sont les mesures les plus utilisées par les gérants. Avoir un ratio de Sharpe par exemple de 1 signifie une performance du portefeuille importante. Cette partie sur le risque et la performance a ainsi pu développer certaines techniques de style de gestion, et de mesure du risque et de la performance. A ce stade des connaissances, il est possible de gérer un portefeuille de manière relativement efficace. Néanmoins, pour améliorer cette gestion, il va falloir porter un intérêt non négligeable à la construction de l'allocation.*

## CHAPITRE 2

# ALLOCATION

### 2.1 Allocation efficiente de Markowitz

Bernstein [5] affirme que "l'intuition la plus célèbre de l'histoire moderne de la finance et de l'investissement se trouve dans un court article intitulé *Portfolio Selection*". Cet article [26] est écrit par Markowitz en 1952. Il pose les bases de la Théorie Moderne du Portefeuille (cf. Aftalion, Poncet et Portait [1], Viviani [34], et Fabozzi, Focardi et Kolm [12] pour une revue de la TMP).

Nous allons dans cette section étudier de manière assez quantitative mais claire, en donnant à chaque fois toutes les étapes des démonstrations mathématiques, la construction de portefeuilles suivant les préceptes de Markowitz. Avant d'entrer dans le calcul à proprement dit de l'allocation optimale, nous allons introduire les principes essentiels d'aversion au risque et de diversification.

#### 2.1.1 Critères de rentabilité et de risque pour la sélection d'un portefeuille

La théorie de Markowitz est une théorie *normative*, c'est-à-dire qu'elle décrit le comportement que devrait suivre sous certaines hypothèses un investisseur rationnel pour construire un portefeuille dans un univers incertain. Il conclut qu'un investisseur optimise le couple rentabilité-risque de son portefeuille.

Pourtant, la première intuition est de choisir un portefeuille d'actifs qui a l'espérance de rentabilité la plus élevée : ce principe est appelé le critère de Pascal. Une telle hypothèse est en réalité trop simpliste car le risque de perte d'un portefeuille est primordial dans le choix de l'investisseur. Ceci a déjà été introduit dans la section 1.3.2 sur les mesures de performance.

Mais nous pouvons l'illustrer aussi par le célèbre paradoxe de Saint-Pétersbourg imaginé par Bernoulli au 18<sup>ème</sup> siècle. Une pièce non truquée est lancée autant de fois  $i$  qu'il est nécessaire pour que le côté face apparaisse. Lorsque le côté face sort, le jeu s'arrête et le joueur reçoit  $2^i$  euros. Quelle est la mise initiale pour que le jeu soit équitable ? Si nous calculons ce droit d'entrée sur la seule espérance  $\mathbb{E}$  de gain du jeu, alors la participation devient prohibitive puisqu'elle est infinie.

En effet, le jeu est composé d'un nombre infini dénombrable de gains  $x = [2, 2^2, \dots, 2^i, \dots]$  qui ont les probabilités d'occurrence correspondantes  $\pi = \left[ \frac{1}{2}, \frac{1}{2^2}, \dots, \frac{1}{2^i}, \dots \right]$ . Selon le critère de Pascal, le coût d'entrée serait égal à l'espérance de gain du jeu :

$$\mathbb{E} = \sum_{i=1}^{+\infty} \pi_i x_i = \sum_{i=1}^{+\infty} \frac{1}{2^i} 2^i = \sum_{i=1}^{+\infty} 1 = +\infty$$

Personne n'accepterait de donner cette somme infinie ! Or, le droit d'entrée la plupart du temps proposé à ce jeu est une petite somme. Cela signifie que d'autres facteurs, autre que l'espérance de rentabilité, interviennent dans la décision du joueur.

Nous avons recours alors à la notion de fonction d'utilité, intégrant la décroissance de l'utilité marginale (fonction d'utilité concave) : 1000 euros de plus lorsque l'on possède déjà 1000 euros n'est pas 2 fois plus *utile* au joueur et donc il ne sera pas prêt à sacrifier en droit d'entrée la même somme plus le jeu progressera. L'*aversion au risque* est une notion essentielle pour comprendre la décision du joueur.

Ainsi, il en est de même pour un investisseur qui sélectionnera le portefeuille qui lui procurera l'espérance d'utilité la plus élevée. Cette espérance d'utilité sera une fonction de l'espérance de rentabilité et du risque induit par le portefeuille.

### 2.1.2 Principe de la diversification

Le principe de la diversification dans la sélection d'un portefeuille relève du vieil adage : "Ne jamais mettre tous ses oeufs dans le même panier". Un exemple simple mais réducteur des bienfaits de la diversification peut être donné lorsque nous calculons la variance d'un portefeuille composé d'actifs indépendants. Soit  $R_P$  la rentabilité d'un portefeuille équi-pondéré composé de  $N$  actifs risqués de rentabilité  $R_i$  non corrélés.

Nous avons  $R_P = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N R_i$ . La variance  $\mathbb{V}(R_P)$  du portefeuille, que nous utiliserons comme mesure du risque<sup>1</sup>, a pour expression d'après le Théorème Central Limite :

$$\mathbb{V}(R_P) = \frac{1}{N^2} \sum_{i=1}^N \mathbb{V}(R_i) = \frac{1}{N^2} N \sigma^2 = \frac{\sigma^2}{N} \rightarrow 0 \text{ pour } N \rightarrow +\infty.$$

Plus le nombre d'actifs croît, plus la variance du portefeuille diminue. Le risque décroît avec la diversification. Néanmoins, détenir un nombre infini d'actifs non corrélés est irréaliste.

Mais étant donné que leur corrélation n'est souvent pas parfaite (c'est-à-dire égale à 1), il est possible de diminuer son risque en diversifiant son investissement. En effet, soient  $X$  et  $Y$  2 variables aléatoires dont le coefficient de corrélation linéaire est  $\rho$  ( $-1 \leq \rho \leq 1$ ). Si nous mesurons le risque par la volatilité, nous avons :

$$\sigma_{X+Y}^2 = \sigma_X^2 + \sigma_Y^2 + 2\rho\sigma_X\sigma_Y = (\sigma_X + \sigma_Y)^2 + 2(\rho - 1)\sigma_X\sigma_Y$$

Ainsi,  $\sigma_{X+Y} \leq \sigma_X + \sigma_Y$ . Si les actifs varient très différemment suivant les évolutions des marchés, il est possible de construire un portefeuille de risque plus faible que la somme des risques des actifs le composant.

Nous allons voir dans la suite comment déterminer le portefeuille optimal avec un nombre fini  $N$  d'actifs à partir de l'espérance de rentabilité et du risque (critère *moyenne-variance*).

### 2.1.3 Construction d'un portefeuille optimal

Dans la multiplicité de choix proposés à l'investisseur en termes de rentabilité et variance de portefeuille, Markowitz introduit la notion de portefeuille *efficient*. "Qui ne risque rien n'a rien" : pour obtenir une espérance de rentabilité plus élevée, il faut accepter un risque plus important. Le risque est l'effort nécessaire à l'obtention d'une rentabilité. Un portefeuille *efficient* est celui qui offre la rentabilité attendue la plus forte pour un niveau de risque donné, ou qui a le risque le plus faible pour une rentabilité attendue donnée. L'ensemble des portefeuilles *efficients* de l'univers d'actifs considéré forme la *Frontière Efficiente*.

Nous allons distinguer deux cas pour déterminer la frontière efficiente suivant la présence ou non d'un actif sans risque. Nous nous inspirons de l'article de Merton [27] de 1972 pour les démonstrations qui vont suivre.

1. Nous avons vu précédemment que la variance n'était pas une bonne mesure des risques extrêmes. Le développement de sélection de portefeuille à partir de la VaR est envisageable mais n'est pas l'objet de cette section.

Avant tout voici quelques brefs rappels mathématiques :

$$\begin{array}{ll} \mathbb{V}(AX) = A\mathbb{V}(X)A' & \mathbb{V}(A+X) = \mathbb{V}(X) \\ \frac{\partial X'A}{\partial X} = A & \frac{\partial X'AX}{\partial X} = 2AX \text{ si } A \text{ est symétrique} \\ (AB)' = B'A' & D' = D \text{ si } D \text{ est un scalaire} \\ AB = C \Leftrightarrow A^{-1}AB = A^{-1}C \Leftrightarrow B = A^{-1}C & \text{si } A \text{ est inversible} \end{array}$$

### Absence d'un actif sans risque

#### Frontière efficiente

La détermination des poids optimaux se fait suivant la minimisation de la variance du portefeuille sous la contrainte d'une rentabilité objectif  $\mu_p$  et le fait que la somme des poids est égale à 1. Formellement, nous avons :

$$\min_{\omega} \omega' \Sigma \omega$$

sous les contraintes :

$$\begin{array}{l} \omega' \mu = \mu_p \\ \omega' e = 1 \end{array}$$

avec  $\omega$  le vecteur de poids des actifs composant le portefeuille,  $\mu$  le vecteur des rentabilités des actifs,  $\Sigma$  la matrice de variance-covariance des rentabilités des actifs, symétrique et définie positive<sup>2</sup>, et  $e = [1 \ 1 \ \dots \ 1]'$ .

Résoudre ce problème de minimisation nous permet de définir l'équation de la frontière efficiente définie par Markowitz. Nous déterminons pour cela le lagrangien :

$$\mathcal{L} = \omega' \Sigma \omega + \lambda_1 (\mu_p - \omega' \mu) + \lambda_2 (1 - \omega' e)$$

avec  $\lambda_1$  et  $\lambda_2$  les multiplicateurs de Lagrange. La condition d'optimalité du premier ordre s'écrit :

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \omega} = 2\Sigma\omega - \lambda_1\mu - \lambda_2e = 0 \Leftrightarrow \omega = \frac{\lambda_1}{2}\Sigma^{-1}\mu + \frac{\lambda_2}{2}\Sigma^{-1}e \quad (2.1)$$

En combinant avec les 2 contraintes, nous avons :

$$\begin{cases} \omega' \mu = \mu_p \\ \omega' e = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \mu' \omega = \mu_p \\ e' \omega = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda_1 \mu' \Sigma^{-1} \mu + \lambda_2 \mu' \Sigma^{-1} e = 2\mu_p \\ \lambda_1 e' \Sigma^{-1} \mu + \lambda_2 e' \Sigma^{-1} e = 2 \end{cases}$$

Nous posons les constantes suivantes :

$$A = e' \Sigma^{-1} \mu = \mu' \Sigma^{-1} e, \quad B = \mu' \Sigma^{-1} \mu, \quad \text{et } C = e' \Sigma^{-1} e.$$

Le système à résoudre en  $\lambda_1$  et  $\lambda_2$  devient :

$$\begin{cases} \lambda_1 B + \lambda_2 A = 2\mu_p \\ \lambda_1 A + \lambda_2 C = 2 \end{cases}$$

Nous obtenons finalement les expressions des multiplicateurs de Lagrange suivants :

$$\begin{array}{l} BC\lambda_1 - A^2\lambda_1 = 2C\mu_p - 2A \Leftrightarrow \lambda_1 = 2 \frac{C\mu_p - A}{D} \\ A^2\lambda_2 - BC\lambda_2 = 2A\mu_p - 2B \Leftrightarrow \lambda_2 = 2 \frac{B - A\mu_p}{D} \end{array}$$

2.  $\Sigma$  est définie positive signifie que  $\forall x \in \mathbb{R}^n, x' \Sigma x \geq 0$  et  $x' \Sigma x = 0 \Rightarrow x = 0$ . Comme elle est en outre symétrique, nous pouvons réduire cette définition au fait que toutes ses valeurs propres doivent être strictement positives.

avec  $D = BC - A^2$ . Enfin, en substituant les expressions des multiplicateurs dans l'équation (2.1), nous obtenons les poids du portefeuille de variance minimum  $\omega_p$  suivants :

$$\omega_p = g + h\mu_p$$

$$\text{avec } g = \frac{1}{D}[B(\Sigma^{-1}e) - A(\Sigma^{-1}\mu)] \text{ et } h = \frac{1}{D}[C(\Sigma^{-1}\mu) - A(\Sigma^{-1}e)].$$

Il est commode de représenter la frontière efficiente, c'est-à-dire l'ensemble des portefeuilles efficients, dans le plan  $(\mu_p, \sigma_p)$  avec (cf. Figure 2.1<sup>3</sup>) :

$$\begin{aligned} \sigma_p &= \sqrt{\omega_p' \Sigma \omega_p} = \sqrt{\left(\frac{\lambda_1}{2} \mu' \Sigma^{-1} + \frac{\lambda_2}{2} e' \Sigma^{-1}\right) \Sigma \omega_p} \\ &= \sqrt{\frac{\lambda_1}{2} \mu' \omega_p + \frac{\lambda_2}{2} e' \omega_p} = \sqrt{\frac{\lambda_1}{2} \mu_p + \frac{\lambda_2}{2}} \\ &= \sqrt{\frac{1}{D} (C\mu_p^2 - 2A\mu_p + B)} \end{aligned}$$

La partie de la frontière efficiente située en-dessous du point où l'écart-type est minimum (correspondant, nous le verrons dans le paragraphe suivant, au portefeuille GMV) n'est bien entendu pas optimale puisqu'il est possible d'obtenir, pour un même risque, une rentabilité plus élevée.

#### Portefeuille global de variance minimum

Outre cette équation définissant l'ensemble des portefeuilles efficients, nous pouvons déterminer le portefeuille ayant la variance la plus faible. Nous l'appelons le portefeuille global de variance minimum (Global Minimum Variance ou GMV). Il se calcule à partir du programme d'optimisation suivant :

$$\min_{\omega} \omega' \Sigma \omega$$

sous la seule contrainte :

$$\omega' e = 1$$

Le lagrangien s'écrit alors :

$$\mathcal{L} = \omega' \Sigma \omega + \lambda(1 - \omega' e)$$

La première condition d'optimalité nous donne la relation suivante :

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \omega} = 2\Sigma\omega - \lambda e = 0 \Leftrightarrow \omega = \frac{\lambda}{2} \Sigma^{-1} e \quad (2.2)$$

En la combinant avec la contrainte, nous obtenons :

$$\frac{\lambda}{2} e' \Sigma^{-1} e = 1 \Leftrightarrow \lambda = \frac{2}{C}$$

Ainsi, nous avons les poids du portefeuille GMV  $\omega_g$  suivants :

$$\omega_g = \frac{1}{C} \Sigma^{-1} e$$

Nous avons aussi les expressions de la rentabilité moyenne  $\mu_g$  et de l'écart-type  $\sigma_g$  du portefeuille GMV suivantes :

$$\begin{aligned} \mu_g &= \mu' \omega_g = \frac{A}{C} \\ \sigma_g &= \sqrt{\omega_g' \Sigma \omega_g} = \sqrt{\frac{1}{C}} \end{aligned}$$

3. Les frontières efficientes de la Figure 2.1 sont déterminées à l'aide d'un cas particulier issu de l'optimisation d'un portefeuille composé de 3 indices actions.

### Présence d'un actif sans risque

#### Frontière efficiente

Avec la présence d'un actif sans risque, la contrainte de somme des poids égale à 1 n'est plus nécessaire puisqu'il sera investi  $(1 - \omega'e)$  dans l'actif sans risque. Le programme d'optimisation déterminant le portefeuille de variance minimum avec comme rentabilité objectif  $\mu_p$  est défini de la manière suivante :

$$\min_{\omega} \omega' \Sigma \omega$$

sous la contrainte :

$$\omega' \mu + (1 - \omega'e)r_f = \mu_p$$

avec  $r_f$  la rentabilité de l'actif sans risque. Le lagrangien s'écrit :

$$\mathcal{L} = \omega' \Sigma \omega + \lambda(\mu_p - \omega' \mu - (1 - \omega'e)r_f)$$

Nous différencions  $\mathcal{L}$  par rapport à  $\omega$  et annulons cette dérivée à 0 :

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \omega} = 2\Sigma\omega - \lambda(\mu - r_f e) = 0 \Leftrightarrow \omega = \frac{\lambda}{2} \Sigma^{-1}(\mu - r_f e) \quad (2.3)$$

En combinant avec la contrainte, nous avons :

$$\begin{aligned} \omega' \mu + (1 - \omega'e)r_f = \mu_p &\Leftrightarrow \frac{\lambda}{2} \mu' \Sigma^{-1}(\mu - r_f e) - \frac{\lambda}{2} e' \Sigma^{-1}(\mu - r_f e) r_f = \mu_p - r_f \\ &\Leftrightarrow \frac{\lambda}{2} = \frac{\mu_p - r_f}{(\mu - r_f e)' \Sigma^{-1}(\mu - r_f e)} \end{aligned}$$

Ainsi, nous avons d'après l'équation (2.3) les poids du portefeuille de variance minimum  $\omega_p$  égaux à :

$$\omega_p = \frac{\mu_p - r_f}{(\mu - r_f e)' \Sigma^{-1}(\mu - r_f e)} \Sigma^{-1}(\mu - r_f e) = c_p \Sigma^{-1}(\mu - r_f e)$$

Et si nous définissons les notations suivantes :  $\tilde{\mu} = \mu - r_f e$ ,  $\tilde{A} = e' \Sigma^{-1} \tilde{\mu}$ ,  $\tilde{B} = \tilde{\mu}' \Sigma^{-1} \tilde{\mu}$ , nous obtenons :

$$\omega_p = \frac{\tilde{\mu}_p}{\tilde{B}} \Sigma^{-1} \tilde{\mu} \quad (2.4)$$

avec  $c_p = \frac{\tilde{\mu}_p}{\tilde{B}}$ .

L'écart-type de ce portefeuille a pour expression :

$$\sigma_p = \sqrt{\omega_p' \Sigma \omega_p} = \sqrt{\frac{\tilde{\mu}_p^2}{\tilde{B}}} = \sqrt{\frac{1}{\tilde{B}}} |\tilde{\mu}_p|$$

ce qui nous donne l'équation de la frontière efficiente. Nous remarquons que cette dernière est une droite croissante lorsque  $\mu_p > r_f$  et décroissante lorsque  $\mu_p < r_f$ . Ce second cas n'est bien entendu pas optimal puisque pour un même risque, nous pouvons obtenir un rendement plus élevé.

La frontière efficiente (cf. Figure 2.1) se réduit ainsi à la tangente croissante à la frontière efficiente des actifs risqués et ayant pour origine le taux sans risque. Nous appelons cette droite la *Capital Market Line*. Nous pouvons observer que l'introduction de l'actif sans risque améliore sensiblement le ratio de Sharpe des portefeuilles puisque pour un même risque, il est possible d'obtenir un rendement plus élevé.

### Portefeuille tangente

Dans l'ensemble des portefeuilles efficients avec la présence d'un actif sans risque, il existe un portefeuille uniquement composé d'actifs risqués. Ce portefeuille est à l'intersection de la frontière efficiente déterminée avec l'absence d'un actif sans risque avec celle déterminée précédemment avec la présence d'un actif sans risque. Étant donné que cette dernière est une droite, le portefeuille composé uniquement d'actifs risqués, appelé portefeuille de marché, est le portefeuille tangent. Nous ajoutons à l'équation (2.4) donc la contrainte de somme des poids égale à 1 pour obtenir l'expression de ses poids.

Ainsi, ses poids  $\omega_q$  sont tels que :

$$\begin{aligned}\omega_q' e &= 1 \Leftrightarrow e' \omega_q = 1 \\ &\Leftrightarrow c_q e' \Sigma^{-1} \tilde{\mu} = 1 \\ &\Leftrightarrow c_q = \frac{1}{\tilde{A}}\end{aligned}$$

Ainsi,

$$\omega_q = \frac{1}{\tilde{A}} \Sigma^{-1} \tilde{\mu}$$

Et l'espérance de rentabilité en excès du taux sans risque et l'écart-type du portefeuille tangent ont pour expression :

$$\begin{aligned}\tilde{\mu}_q &= \tilde{\mu}' \omega_q = \frac{\tilde{B}}{\tilde{A}} \\ \sigma_q &= \sqrt{\omega_q' \Sigma \omega_q} = \sqrt{\frac{\tilde{B}}{\tilde{A}^2}}\end{aligned}$$

Il est intéressant de préciser pour conclure que ce portefeuille tangent est celui qui a le ratio de Sharpe maximum, parmi les portefeuilles composés uniquement d'actifs risqués, égal à :

$$S_q = \frac{\tilde{\mu}_q}{\sigma_q} = \sqrt{\tilde{B}}$$

En effet, le portefeuille tangent appartient bien à la droite la plus pentue, parmi celles issues de l'origine  $r_f$  et coupant la frontière efficiente des actifs risqués.

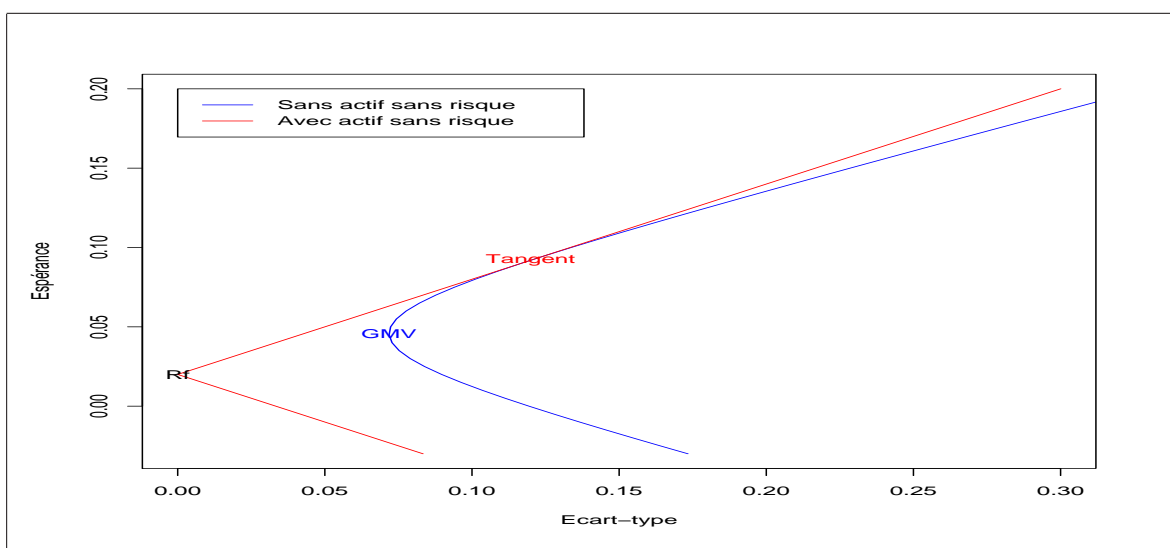


FIGURE 2.1 – Frontières efficientes

### Frontière efficiente avec un paramètre d'aversion au risque

Il est possible aussi de construire la frontière efficiente des actifs risqués à l'aide d'une formulation différente mais très utilisée en pratique. Nous allons alors tenter de maximiser l'utilité d'un investisseur rationnel qui sera caractérisé par un paramètre d'aversion au risque  $\gamma > 0$ <sup>4</sup>.

Le portefeuille ainsi obtenu est le portefeuille *optimal* qui maximise l'espérance de l'utilité de l'investisseur  $E[U(W)]$  avec  $W$  la richesse de l'investisseur. Dans le cadre théorique de Markowitz, il est utilisé une fonction d'utilité quadratique. Maximiser cette fonction objectif revient à maximiser, par rapport à  $\omega$ , la fonction d'optimisation de moyenne-variance :

$$\max_{\omega} E[U(W)] \Leftrightarrow \max_{\omega} \left( \omega' \tilde{\mu} - \frac{\gamma}{2} \omega' \Sigma \omega \right)$$

Nous remarquons que plus l'individu est averse au risque ( $\gamma$  croît), plus le risque du portefeuille optimal pénalise son espérance de rentabilité : le portefeuille maximisé est donc moins risqué. La maximisation sans contraintes de cette fonction a pour solution les poids optimaux  $\omega^*$  :

$$\omega^* = \frac{1}{\gamma} \Sigma^{-1} \tilde{\mu}$$

Ces derniers sont déterminés à l'aide de la résolution de l'optimisation d'une fonction quadratique qui annule la dérivée première en  $\omega$  et a une dérivée seconde négative, ce qui implique sa maximisation.

Le portefeuille tangent est déterminé pour une aversion au risque :  $\gamma = \tilde{A} = e' \Sigma^{-1} \tilde{\mu}$ .

Des contraintes peuvent être ajoutées et les poids optimaux sont alors obtenus à l'aide de méthodes de maximisation numériques de l'utilité. Des exemples de contraintes sont l'interdiction de vente à découvert, les poids ne peuvent alors pas être négatifs, ou encore l'impossibilité de recourir à l'effet de levier, c'est-à-dire que l'investissement est auto-financé et le poids dans l'actif sans risque ne doit donc pas être négatif (pas d'emprunt).

### Limites de l'optimisation de Markowitz

Nous allons présenter 4 limites à l'optimisation de portefeuille suivant Markowitz qui nous semblent essentielles :

1. La première concerne la modélisation statistique sous-jacente à l'optimisation moyenne-variance : effectivement, réduire les actifs à leur moments d'ordre 1 (moyenne) et 2 (variance) revient à modéliser les actifs du portefeuille optimal par une loi gaussienne. Or certains actifs ne sont pas gaussiens et peuvent avoir des profils de distribution très différents : l'optimisation de Markowitz fournira alors des résultats peu cohérents avec la réalité. Nous pensons aux actions risquées mais aussi aux titres de créances qui devraient être modélisées plus précisément.
2. La deuxième est la dépendance de l'optimisation de Markowitz à l'estimation des rendements moyens. Ces rendements estimés pour une période d'allocation peuvent évoluer à court-terme : or un changement très faible de la moyenne des rendements aura des conséquences démesurément importantes sur l'allocation, ce qui semble ennuyeux dans la pratique. L'optimisation est donc relativement instable.
3. La troisième survient lorsque le nombre d'actifs à profils similaires est très importants. Alors la caractéristique définie positive de la matrice de variance-covariance peut être mise à mal. Des méthodes d'extraction de facteurs communs (ACP) ou de shrinkage peuvent alors déterminer une matrice de variance-covariance plus facile à utiliser. L'APT (section 1.2.2) peut ainsi être utilisée pour déterminer les facteurs latents et calculer une matrice de variance-covariance sur ces facteurs de risque orthogonaux.

4. La calibration de cette aversion n'est pas évidente. Elle diffère fortement entre les individus. Nous pouvons néanmoins déterminer un coefficient moyen. Considérons le portefeuille de marché de rentabilité en excès du taux sans risque  $R_M - r_f$  et de volatilité  $\sigma_M$ . Alors, nous définissons  $\gamma = \frac{R_M - r_f}{\sigma_M^2}$ .

4. La dernière limite est opérationnelle : en effet, les optimisations étudiées précédemment donnent des solutions simples mais dans la réalité les contraintes sur les poids sont plus nombreuses et rendent l'optimisation difficile. En effet, régulièrement, un investisseur peut vouloir mettre des limites d'achat ou de vente sur certaines classes d'actifs (on peut penser par exemple aux actions des pays émergents qui sont plus risquées et dont on peut vouloir limiter l'allocation). Les contraintes vont alors influencer fortement les allocations qui ne seront alors plus si optimales que prévues...

Nous allons présenter dans la suite deux méthodes d'allocation innovantes permettant de dépasser ces limites de l'optimisation de Markowitz.

La première va permettre d'éviter la deuxième limite de dépendance de l'allocation à l'estimation des rendements moyens : Black et Litterman ont ainsi proposé une modélisation plus robuste à l'estimation des rendements, que nous présentons en section 2.2.

La deuxième méthode est une méthode probabiliste dont nous allons présenter succinctement les enjeux en section 2.3. Nous pourrons alors améliorer l'optimisation en réalisant des simulations Monte Carlo à l'aide de modélisations des actifs du portefeuille à optimiser plus adéquates que la loi gaussienne.

#### **Conseil pratique de gestion**

*La méthodologie de Markowitz, dans des conditions de normalité des actifs, permet au gérant de fixer les poids de son portefeuille selon la contrainte qu'il s'est fixée d'objectif de rentabilité par exemple. Ainsi, il est possible de combiner les connaissances pratiques de la première partie avec l'allocation efficiente de Markowitz : dans la gestion stylisée par exemple d'actions défensives, nous allons pouvoir déterminer les poids optimaux entre toutes les actions ayant un  $\beta$  inférieurs à 1 qui ont été sélectionnées. Cette allocation que l'on appelle stratégique, déterminée sur un horizon de moyen-terme, sera certainement ajustée suivant les conditions de marché : ce sera l'allocation tactique, dont nous allons présenter un outil quantitatif dans la section suivante.*

## 2.2 Allocation tactique Black-Litterman

Tout d'abord, définissons l'allocation tactique relativement à l'allocation stratégique. La différence entre ces deux types d'allocation est d'ordre temporel. Plus précisément, l'allocation stratégique va être définie pour un horizon de temps relativement long (1 à 3 ans) et l'allocation tactique pour un horizon plus court (1 à 3 mois). Cette dernière sera donc un ajustement de l'allocation stratégique aux conditions conjoncturelles du marché.

L'optimisation de Markowitz étant très sensible aux évolutions mêmes faibles des estimations des rendements moyens, Black et Litterman ont proposé une version plus robuste de l'optimisation moyenne-variance.

### 2.2.1 Principe général

Black et Litterman ont développé en 1990 un modèle d'allocation quantitatif flexible sur lequel nous pouvons affecter des vues de sur ou sous-évaluation sur les actifs. Les poids optimaux qui en ressortent conjuguent donc le portefeuille stratégique original (considéré comme portefeuille d'équilibre) et le portefeuille issu des vues.

L'approche Black-Litterman d'allocation tactique est intéressante à différents niveaux :

1. c'est une approche originale, flexible et scientifiquement robuste d'allocation tactique, qui conjugue portefeuille stratégique et vues tactiques.
2. il est possible de la compléter par des contraintes propres au processus d'allocation tactique.

Les inputs principaux nécessaires à la détermination du portefeuille tactique sont les vues (issues des économistes ou de modèles quantitatifs de prévision) sur les actifs composant le portefeuille stratégique ainsi que l'allocation stratégique du portefeuille. A partir de cette dernière, nous calculons les rentabilités implicites  $\Pi$  correspondantes, en excès du taux sans risque :

$$\Pi = \gamma \Sigma \omega^*$$

avec  $\gamma$  le paramètre d'aversion au risque,  $\Sigma$  la matrice de variance-covariance des actifs, et  $\omega^*$  les allocations stratégiques du portefeuille.

Les vues que nous obtenons sur les différents actifs vont faire dévier les rentabilités implicites dans le sens approprié. Ceci détermine alors ce que nous appelons les rentabilités mixtes  $\Psi$  de Black-Litterman, qui ont pour expression<sup>5</sup> :

$$\Psi = [(\tau \Sigma)^{-1} + P' \Omega^{-1} P]^{-1} [(\tau \Sigma)^{-1} \Pi + P' \Omega^{-1} P Q] = \frac{A}{A+B} \Pi + \frac{B}{A+B} Q$$

$\tau$  est un paramètre de confiance dans les vues : plus  $\tau$  est faible, plus nous aurons confiance dans le portefeuille stratégique et moins dans les vues. La matrice  $P$  détermine la présence d'une vue sur un actif et nous décidons de la définir comme une matrice identité : nous faisons donc l'hypothèse que nous avons pour chaque actif une vue, et que cette dernière peut-être neutre.  $\Omega$  contient les incertitudes attachées aux notes (homogène à la variance de l'actif) et  $Q$  les rentabilités espérées des vues. Les rentabilités mixtes résultent ainsi d'une moyenne pondérée entre les rentabilités d'équilibre  $\Pi$  et celles associées aux vues  $Q$ . C'est à partir de ces espérances de rentabilités que nous déterminons un portefeuille optimisé, sous différentes contraintes. Le fait de pondérer le portefeuille stratégique et le portefeuille issu des vues permet de rendre plus robustes les allocations déterminées, que nous contrôlons alors plus précisément, relativement à l'instabilité de l'optimisation de Markowitz.

Les poids  $\omega^{**}$  tactiques se déduisent de l'optimisation de la fonction d'utilité quadratique  $U$  dont nous rappelons l'expression :

$$U(W) = \omega' \hat{\Psi} - \frac{\gamma}{2} \omega' \hat{\Sigma} \omega$$

5. Nous ne donnons pas ici la démonstration de ce calcul qui peut être déterminé à partir par exemple d'une application des Moindres Carrés Généralisés (cf. [12]).

## 2.2.2 Mise en place pratique

### Paramètre d'aversion au risque

Nous pouvons calibrer le paramètre d'aversion au risque  $\gamma$  à partir de la formulation suivante :

$$\gamma = \frac{\omega^* \tilde{\mu}}{\omega^{*'} \Sigma \omega^*}$$

### Paramètre de confiance dans les vues

Le paramètre de confiance des vues  $\tau$  est appliqué à la matrice de variance-covariance  $\Sigma$  des actifs risqués. Les rentabilités mixtes  $\Psi$  sont distribuées autour des rentabilités implicites d'équilibre  $\Pi$  avec une matrice de variance-covariance proportionnelle à la matrice de variance-covariance initiale  $\Sigma$ . Le facteur de proportionnalité est  $\tau$ . Plus  $\tau$  est faible, plus nous aurons confiance dans l'allocation stratégique et non dans les vues. Dans le cas particulier où  $\tau = 0$ , les rentabilités espérées ne sont plus aléatoires et sont égales aux rentabilités implicites :  $\Psi = \Pi$ .

Nous calibrons ce paramètre en recherchant un compromis entre l'incertitude des vues et celle du marché, donc entre  $\Omega$  et  $\Sigma$  :

$$\tau = \frac{\text{tr}(\Omega)}{e' P \Sigma P' e}$$

Nous conseillons néanmoins d'ajuster ce paramètre de confiance entre 5% et 10%.

### Obtenir les rentabilités des vues à partir de notes

Il peut arriver que les vues associées à chaque actif  $i$  ne soient pas sous la forme d'une rentabilité mais d'une note  $n_i \in \{-2; -1; 0; +1; +2\}$ .

Il faut alors transformer les notes des vues sur les actifs en rentabilités pour obtenir le vecteur  $Q$ . Pour cela, nous déterminons une relation linéaire entre la rentabilité de la vue  $Q_i$  et celle implicite  $\Pi_i$  de la manière suivante :

$$Q_i = \Pi_i + n_i \sigma_i * \kappa$$

avec  $\kappa$  un facteur multiplicatif correspondant à la probabilité d'erreur de dispersion des rentabilités par rapport à l'incertitude associée à la vue quantifiée par  $n_i \sigma_i$ . Nous fixons souvent  $\kappa$  entre 0.3 et 0.5.

### La contrainte de risque bêta

Il est possible d'ajouter des contraintes à l'optimisation tactique. Une des contraintes que nous privilégions dans ce cours est celle d'obtenir un bêta similaire entre l'allocation stratégique et l'allocation tactique, c'est-à-dire la même exposition au facteur de marché, ce qui est assez usité dans la pratique.

Nous définissons alors le bêta  $\beta^{\text{BL}}$  suivant :

$$\beta^{\text{BL}} = \frac{\omega^{**'} \Sigma \omega^*}{\omega^{*'} \Sigma \omega^*}$$

Rappelons que  $\omega^{**}$  sont les poids de l'allocation tactique et  $\omega^*$  les poids de l'allocation stratégique. Et nous calculons les nouveaux poids pour lesquels  $\beta^{\text{BL}} = 1$ .

### Conseil pratique de gestion

*La méthodologie de Black et Litterman permet de proposer un outil d'allocation tactique quantitatif très utile et pouvant fortement aider à la décision de gestion d'un portefeuille. Il sera ainsi possible de faire dévier les allocations stratégiques suivant les vues du gérant (aidé d'un économiste ou d'un modèle économétrique) à partir d'un modèle quantitatif robuste et pouvant intégrer des contraintes de gestion intéressantes comme une exposition similaire au facteur de marché.*

## 2.3 Allocation d'un portefeuille par simulations Monte Carlo

L'allocation optimale de Markowitz réduit les actifs, composant le portefeuille, à ses deux premiers moments statistiques. Or les actifs financiers peuvent avoir des profils de distribution très différents de la loi gaussienne et donc ne pas être réduits à leurs deux premiers moments. L'utilisation de simulations Monte Carlo va permettre d'ajouter de la flexibilité dans la modélisation des actifs et améliorer leur précision.

Cette approche peut avoir de nombreuses applications et peut proposer une multitude de modélisations des actifs ainsi que de leur dépendance<sup>6</sup>. Nous allons cependant nous concentrer sur une application simple mais pédagogiquement intéressante et qui pourra être développée à souhait.

Un atout supplémentaire de cette approche par simulations Monte Carlo est la sélection de portefeuilles optimaux à l'aide d'indicateurs de risque plus précis comme la VaR étudiée dans la section 1.2.3.

### 2.3.1 Principe de l'allocation Monte Carlo

Le principe de l'allocation Monte Carlo est relativement simple et concret. Nous diffusons de manière stochastique les probables trajectoires des différents actifs financiers composant le portefeuille dans le futur. Cela demande des prévisions sur les actifs mais aussi des modélisations probabilistes précises. Nous construisons alors  $N$  trajectoires simulées d'un portefeuille dont nous avons fixé les poids au préalable. Puis nous déterminons certains indicateurs (rentabilité, volatilité, VaR, ratio de Sharpe, etc.) sur chaque trajectoire simulée du portefeuille et nous en calculons la moyenne. Nous diffusons pour un autre portefeuille à poids fixés ses  $N$  trajectoires simulées à partir desquelles nous calculons à nouveau la moyenne des indicateurs. Nous réalisons cela pour plusieurs portefeuilles, suivant nos contraintes d'allocation, et nous déterminons au final le portefeuille ayant par exemple la meilleure moyenne de ratios de Sharpe.

Pour décider quel sera le meilleur portefeuille, nous avons donc déterminé la moyenne, sur les multiples trajectoires du portefeuille, de différents indicateurs de risque et de performance. Ces moyennes ont en fait des propriétés intéressantes : en effet, elles convergent vers les **vraies** moyennes (Loi des Grands Nombres) et les erreurs sont asymptotiquement gaussiennes (Théorème Central Limite).

Nous allons nous concentrer dans la suite sur l'allocation Monte Carlo pour un portefeuille diversifié simple contenant un indice actions, un indice obligataire et un indice monétaire. Nous présentons donc dans ce qui suit une modélisation possible pour chacun de ces trois actifs.

### 2.3.2 Modélisations probabilistes

Nous allons dans ce paragraphe proposer des modélisations probabilistes simples et fondamentales pour les 3 actifs financiers suivants : action, obligation et taux monétaire ; ainsi qu'une méthode classique de calibration des paramètres des modèles : le Maximum de Vraisemblance.

#### Indice actions

##### Modèle

D'après les résultats énoncés précédemment, la caractéristique gaussienne peut être rejeté pour les actions mais ne semble tout de même pas absurde étant donné le profil de distribution d'un indice actions (cf. Figure 1.5 pour le CAC 40). Certes, il serait nécessaire d'utiliser des modèles plus précis mais la loi gaussienne semble tout de même un bon arbitrage entre l'adéquation aux rentabilités d'un indice actions et la simplicité de sa modélisation.

Nous allons donc utiliser comme modèle probabiliste le mouvement Brownien géométrique de type Black et Scholes (moyenne et volatilité constantes). Son équation différentielle stochastique (EDS) s'écrit de la manière suivante :

$$dS_t = S_t(\mu dt + \sigma dW_t) \quad (2.5)$$

6. Nous pouvons en effet modéliser la dépendance, parfois extrême, entre les actifs par des outils probabilistes complexes et robustes : les copules.

avec  $\mu$  la moyenne et  $\sigma$  la volatilité des rentabilités de l'indice actions, et  $W_t$  un mouvement Brownien standard.

La réalisation pratique de simulations nécessite la discrétisation de ce processus. Pour simuler une trajectoire, nous utilisons la discrétisation exacte suivante :

$$S_{t+\Delta t} = S_t \exp \left[ \left( \mu - \frac{\sigma^2}{2} \right) \Delta t + \sigma \sqrt{\Delta t} \varepsilon \right]$$

avec  $\Delta t$  le pas de temps de discrétisation retenu et  $\varepsilon$  une variable aléatoire de loi normale centrée réduite. Nous pouvons aussi utiliser une discrétisation approximative à l'aide d'un schéma d'Euler. Le schéma d'Euler s'écrit alors :

$$\tilde{S}_{t+\Delta t} = \tilde{S}_t (1 + \mu \Delta t + \sigma \sqrt{\Delta t} \varepsilon)$$

avec  $\tilde{S}$  la discrétisation approximative de l'indice actions.

Concrètement, nous générons des nombres aléatoires tirée d'une loi Normale centrée réduite et à partir de ces derniers, nous appliquons la formule de discrétisation pour obtenir *un* chemin particulier de l'indice actions. Il nous faut maintenant estimer les valeurs  $\mu$  et  $\sigma$ .

#### Calibration

Nous utilisons la méthode du Maximum de Vraisemblance.

Tout d'abord rappelons que les rentabilités  $R_{t|t+\Delta t} = \frac{S_{t+\Delta t}}{S_t} - 1$  de l'indice actions suivent la loi Normale suivante :

$$R_{t|t+\Delta t} \sim \mathcal{N} \left( \left( \mu - \frac{\sigma^2}{2} \right) \Delta t ; \sigma^2 \Delta t \right)$$

La log-vraisemblance s'écrit alors :

$$l_t(R_{t|t+\Delta t} ; \mu, \sigma) = -\frac{1}{2} \left[ \ln(2\pi) + \ln S^2 + \frac{(R_{t|t+\Delta t} - M)^2}{S^2} \right] \quad 1 \leq t \leq T$$

avec  $T$  l'horizon de l'échantillon de données,  $S^2 = \sigma^2 \Delta t$  et  $M = \left( \mu - \frac{\sigma^2}{2} \right) \Delta t$ .

La log-vraisemblance peut être considérée comme la probabilité d'observation de l'échantillon. L'estimation va alors avoir pour objectif la maximisation de cette probabilité d'observation : en effet, puisque nous avons observé l'échantillon, c'est que sa probabilité d'apparition est forte. Nous pouvons estimer alors le vecteur des paramètres  $\theta = (\mu, \sigma)'$  par Maximum de Vraisemblance. L'estimateur du Maximum de Vraisemblance se définit comme :

$$\hat{\theta} = \operatorname{argmax} \sum_{t=1}^T l_t(\theta)$$

Nous obtenons les estimateurs suivants :

$$\begin{aligned} \hat{M} &= \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T R_{t|t+\Delta t} \\ \hat{S}^2 &= \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T \left( R_{t|t+\Delta t} - \hat{M} \right)^2 \end{aligned}$$

### Modélisation de l'indice obligataire

Avant tout définissons une obligation pour comprendre les enjeux de la modélisation qui suivra.

#### Définition d'une obligation

Les obligations sont des titres de dette pour les entreprises et de créances pour les souscripteurs. Les obligations sont émises sur un marché primaire à un taux fixe généralement et négociées sur un marché secondaire avec un prix évoluant en fonction des taux émis sur le marché primaire. La société s'engage à rembourser le capital emprunté à une échéance déterminée et à verser un intérêt annuel. Les droits sont donc moins élevés que pour les actions mais les créanciers seront prioritaires lors du remboursement suite à un défaut de la société.

L'obligation est caractérisée par neuf éléments :

1. la valeur nominale ou faciale  $V$  définie à l'émission et à partir de laquelle sont calculés les intérêts ou coupons versés,
2. la maturité  $T$ , définissant la date de remboursement de l'emprunt obligataire,
3. la valeur d'émission qui peut être égale à la valeur nominale, l'émission est alors *au pair*, ou en-dessous caractérisant une prime à l'émission,
4. la valeur de remboursement, égal ou supérieur à la valeur nominale, et dans ce dernier cas, il existe donc une prime de remboursement,
5. le coupon  $C$ , définissant le montant des intérêts versés,
6. le taux nominal ou facial, il définit la valeur du coupon et donc le revenu de l'obligation. Il peut être fixe ou variable,
7. le taux de rendement actuariel  $r_t$ , définissant le rendement réel suite aux variations de taux sur le marché secondaire au temps  $t$ ,
8. la date de jouissance : date à partir de laquelle les intérêts sont calculés,
9. la date de règlement : date à laquelle l'emprunt est liquidé.

La valorisation  $V_t$  d'une obligation en  $t$  va être égale à la somme actualisée de ses flux futurs  $F$  composés des coupons et du remboursement final :

$$V_t = \sum_{\theta=t+1}^T \frac{F_\theta}{(1+r_t)^{\theta-t}} = \sum_{\theta=t+1}^{T-1} \frac{C}{(1+r_t)^{\theta-t}} + \frac{V}{(1+r_t)^{T-t}}$$

La valeur de l'obligation va évoluer de manière opposée à celle du taux de rendement actuariel : si les taux montent (baissent), la valeur de l'obligation sur le marché secondaire va diminuer (monter). Pour quantifier cette sensibilité de la valeur de l'obligation à la variation des taux, nous allons utiliser un concept fondamental : la duration.

La duration a été introduite par Macaulay en 1938 qui cherchait à comparer l'évolution des taux longs avec celle des taux courts. Réduire la différence entre ces taux à la maturité ne lui semblait pas adéquat car c'était réduire la *durée* de l'échéancier à son dernier flux. Par exemple, la *durée* d'un zéro-coupon de maturité 10 ans est simple à estimer puisque donnant lieu à un flux unique, la *durée* de l'échéancier est 10 ans. Or pour une obligation de même maturité mais donnant droit à un coupon annuel, ceci ne semble pas être juste : puisque des remboursements sont faits avant la maturité, la duration de l'échéancier des flux financiers devra être inférieure à celle du zéro-coupon. Macaulay va alors pondérer les différentes maturités des flux financiers de l'obligation pour déterminer la duration. Hicks en 1946 va exprimer cette dernière en fonction de la sensibilité d'un titre obligataire au taux de rendement actuariel. Nous obtenons l'expression suivante de la sensibilité  $S$  de la valeur de l'obligation  $V$  au taux  $r$ , en  $t = 0$ , en dérivant la variation relative de cette valeur  $V$  consécutive à la variation du taux  $r$  :

$$S = \frac{dV}{V} \frac{1}{dr} = -\frac{1}{1+r} \sum_{\theta=1}^T \frac{F_\theta}{V(1+r)^\theta} \theta = -\frac{1}{1+r} \sum_{\theta=1}^T \omega_\theta \theta = -\frac{D}{1+r}$$

Nous obtenons ainsi l'expression de la durée  $D$  comme une moyenne pondérée des maturités  $\theta$  des flux financiers. La somme des poids  $\omega_\theta$  est bien égale à 1.

La durée peut enfin être vue comme la durée de vie moyenne actuarielle d'un titre obligataire. A la fin de cette durée de vie moyenne, et sous l'hypothèse d'une structure par termes plate et ne pouvant se déformer que parallèlement, l'investisseur est immunisé contre la variation de taux : le rendement de l'obligation est à partir de cette date au minimum égal au rendement actuariel initial. Ceci s'explique par la compensation avec le temps de la dévalorisation de l'obligation, par exemple, à cause de la hausse des taux, par le placement à des taux plus élevés des coupons récupérés.

La durée fait l'hypothèse sous-jacente que tous les taux ayant des maturités différentes évoluent de manière uniforme. Or la structure par termes des taux révèle que sa déformation n'est pas seulement uniforme mais intègre deux autres facteurs d'évolution : un facteur de pentification de la courbe de la structure par termes, ainsi qu'un facteur de courbure. L'étude des co-mouvements de la structure par termes à l'aide par exemple d'une Analyse en Composantes Principales met en exergue ces deux autres facteurs de déformation et permet d'améliorer la gestion du risque de taux.

### Modèle

Nous pouvons maintenant proposer une modélisation adéquate. En fait, nous pouvons définir la rentabilité d'un indice obligataire, investissant dans une obligation de durée  $D$ , comme l'addition de la capitalisation des coupons perçus et de la variation de la valorisation de l'obligation suivant celle des taux. Un indice obligataire  $O_t$  de durée  $D$  a donc pour diffusion discrète <sup>7</sup> :

$$O_{t+\Delta t} = O_t \left[ \left(1 + r_t^{\text{long}}\right)^{\Delta t} - \frac{D}{1 + r_t^{\text{long}}} \left(r_{t+\Delta t}^{\text{long}} - r_t^{\text{long}}\right) \right]$$

avec  $r_t^{\text{long}}$  le taux long égal à :

$$r_t^{\text{long}} = sp_t + r_t^{\text{court}}$$

avec  $sp_t$  le spread ou écart entre le taux long et le taux court.

Il va falloir alors s'intéresser à la modélisation de ce spread. Sur la Figure 2.2, nous pouvons observer que le profil d'un spread semble intégrer un phénomène de retour à la moyenne. Nous allons donc proposer une modélisation correspondant à ce phénomène via un processus de Vasicek qui suit l'EDS suivante :

$$dsp_t = k(\mu - sp_t)dt + \sigma dW_t$$

avec  $k$  la force de rappel,  $\mu$  la moyenne de long terme des spreads vers laquelle ils tendent,  $\sigma$  la volatilité des spreads et  $W_t$  un mouvement Brownien standard.

Il existe une discrétisation exacte qui est :

$$sp_{t+\Delta t} = sp_t e^{-k\Delta t} + \mu(1 - e^{-k\Delta t}) + \sigma \sqrt{\frac{1 - e^{-2k\Delta t}}{2k}} \eta$$

avec  $\eta$  un nombre aléatoire issu d'une loi normale centrée réduite.

La discrétisation déterminée par le schéma d'Euler s'écrit :

$$\tilde{sp}_{t+\Delta t} = \tilde{sp}_t + k(\mu - \tilde{sp}_t)\Delta t + \sigma\sqrt{\Delta t}\eta$$

---

7. Nous avons utilisé la discrétisation capitalisée du taux et non son approximation :  $r_t^{\text{long}}\Delta t \approx \left(1 + r_t^{\text{long}}\right)^{\Delta t} - 1$  avec  $r_t^{\text{long}}$  le taux en base annuelle défini classiquement sur les marchés financiers.

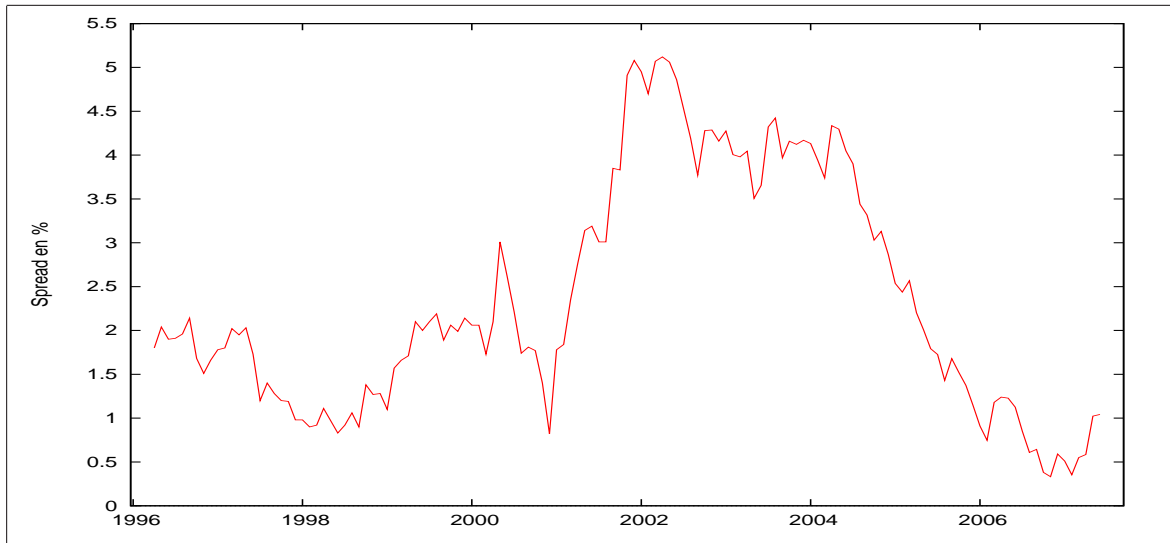


FIGURE 2.2 – Spread entre l'indice taux composite corporate 10 ans US et le zéro-coupon 3 mois US entre avril 1996 et juin 2007

Enfin, il est nécessaire de corrélérer les indices actions et obligataire. Pour cela, nous allons simuler les résidus  $\varepsilon$  (défini précédemment pour les actions) et  $\eta$  de la façon suivante :

$$\eta = \rho\varepsilon + \sqrt{1 - \rho^2}z$$

avec  $\rho$  le coefficient de corrélation linéaire entre les rentabilités de l'indice actions et celles de l'indice obligataire, et  $z$  une réalisation d'une loi normale centrée réduite indépendante<sup>8</sup>.

#### Calibration

Pour calibrer le processus de Vasicek des spreads, observons que :

$$sp_t \sim \mathcal{N}\left(\mu(1 - e^{-kdt}) + e^{-kdt}sp_{t-1}; \frac{\sigma^2}{2k}(1 - e^{-2kdt})\right)$$

Le caractère gaussien explique le fait que le modèle de Vasicek soit très répandu, car plus simple à manipuler.

Ainsi, nous pouvons déterminer la log-vraisemblance de l'échantillon d'étude, étant donné que chaque observation de la série temporelle des spreads est issue de la loi Normale précédemment décrite. Elle s'écrit :

$$l_t(sp; k, \mu, \sigma) = -\frac{1}{2} \left[ \ln(2\pi) + \ln S^2 + \frac{(sp_t - M)^2}{S^2} \right] \quad 1 \leq t \leq T - 1$$

avec  $S^2 = \frac{\sigma^2}{2k}(1 - e^{-2k\Delta t})$ ,  $M = \mu(1 - e^{-k\Delta t}) + e^{-k\Delta t}sp_{t-1}$ .

Nous pouvons estimer alors le vecteur des paramètres  $\theta = (k, \mu, \sigma)'$  par Maximum de Vraisemblance. L'estimateur du Maximum de Vraisemblance se définit comme :

$$\hat{\theta} = \operatorname{argmax} \sum_{t=2}^T l_t(\theta)$$

8. Cette façon de corrélérer a en fait pour hypothèse sous-jacente la modélisation de la structure de dépendance entre actions et obligations par une copule gaussienne.

Les expressions exactes des estimateurs s'en déduisent, avec  $\alpha = e^{-k\Delta t}$  (cf. Brigo et Mercurio [7]) :

$$\hat{\alpha} = \frac{(T-1) \sum_{t=2}^T sp_t sp_{t-1} - \sum_{t=2}^T sp_t \sum_{t=2}^T sp_{t-1}}{(T-1) \sum_{t=1}^{T-1} sp_t^2 - \left[ \sum_{t=1}^{T-1} sp_{t-1} \right]^2}$$

$$\hat{\mu} = \frac{1}{(T-1)(1-\hat{\alpha})} \sum_{t=2}^T (sp_t - \hat{\alpha} sp_{t-1})$$

$$\hat{S}^2 = \frac{1}{T-1} \sum_{t=2}^T [sp_t - \hat{\alpha} sp_{t-1} - \hat{\mu}(1-\hat{\alpha})]^2$$

Il est possible aussi de les déterminer par des méthodes numériques d'optimisation de la log-vraisemblance.

### Modélisation de l'indice monétaire

Nous appelons indice monétaire un indice capitalisant un taux de courte maturité  $r_t^{\text{court}}$ . Ce dernier est la somme du taux directeur d'une banque centrale et d'un léger spread de volatilité faible. Il faut donc étudier le profil du taux directeur d'une banque centrale. Sur la Figure 2.3, nous pouvons observer que ce taux directeur est composé de sauts à la hausse ou à la baisse : en effet, les banquiers centraux annoncent la hausse ou la baisse du taux directeur suivant la conjoncture économique, créant ainsi des sauts. Il va donc être certainement judicieux de modéliser le taux directeur par un processus à sauts, ou processus de Poisson.

L'indice monétaire  $M_t$  sera donc composé d'une capitalisation sur le taux directeur  $r_t^{\text{directeur}}$  auquel on ajoute un spread faible  $sp_t^{\text{court}}$  :

$$M_{t+\Delta t} = M_t (1 + r_t^{\text{court}})^{\Delta t} = M_t (1 + r_t^{\text{directeur}} + sp_t^{\text{court}})^{\Delta t}$$

avec le taux directeur simulé par un processus à sauts :

$$r_{t+\Delta t}^{\text{directeur}} = r_t^{\text{directeur}} + \kappa * \mathbb{1}_{u_1 < \lambda \Delta t} * [\mathbb{1}_{u_2 < 0.5} - \mathbb{1}_{u_2 \geq 0.5}]$$

avec  $\mathbb{1}$  symbolisant la fonction indicatrice,  $u_1$  et  $u_2$  deux réalisations indépendantes d'une loi uniforme  $[0,1]$ ,  $\lambda$  l'intensité ou le nombre de sauts par an et  $\kappa$  l'amplitude des sauts. Ces deux derniers paramètres peuvent être fixés d'après les anticipations des interventions de la banque centrale sur le taux directeur.

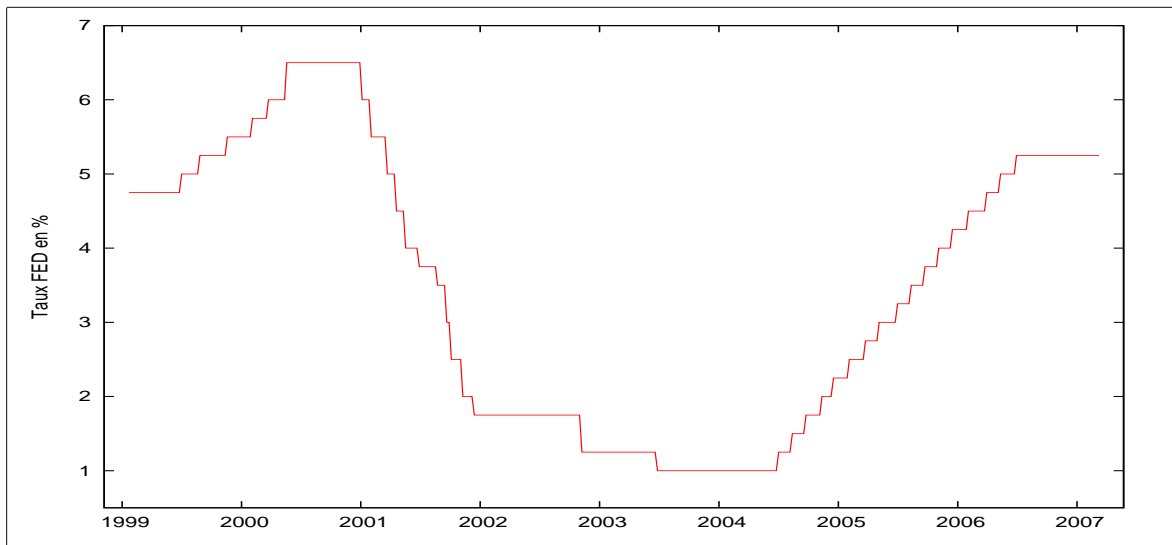


FIGURE 2.3 – Taux directeur hebdomadaire de la Federal Reserve US entre le 22 janvier 1999 et le 9 mars 2007

Enfin, le spread  $sp_t^{\text{court}}$  composant le taux court est issu d'une loi gaussienne  $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$  à calibrer par les moments empiriques de ce spread.

#### Conseil pratique de gestion

*L'approche d'allocation à l'aide de simulations Monte Carlo n'a pas pour fondement une théorie financière aussi précise que celle de Markowitz mais gagne l'avantage d'être très flexible et précise en ce qui concerne les modélisations des actifs financiers composant le portefeuille. Il est relativement simple pour un gérant de créer son propre modèle d'allocation Monte Carlo et ainsi définir un portefeuille correspondant au profil rendement/risque défini au préalable. L'aide d'un ingénieur quantitatif sera néanmoins nécessaire pour développer des modélisations plus complexes.*

## CHAPITRE 3

# STRATÉGIES D'INVESTISSEMENT

Nous avons étudié précédemment comment allouer les actifs au sein d'un portefeuille en nous focalisant sur l'optimisation de l'allocation suivant les lois de probabilités sous-jacentes des actifs mais aussi des critères de performance et des prévisions économiques. Maintenant que ces poids sont déterminés, une interrogation s'élève sur la façon dont ils vont être ajustés selon le profil du flux final que l'on souhaite.

### 3.1 Stratégies buy-and-hold et constant mix

Pour introduire les stratégies d'investissement, nous allons tout d'abord tenter de formaliser la différence fondamentale entre une stratégie naïve, laissant son allocation flotter au gré de l'évolution des prix des actifs la composant, et une stratégie d'allocation fixe à tout moment :

1. la première est une stratégie *buy-and-hold*,
2. et la seconde une stratégie *constant mix*.

Nous nous inspirons de la typologie de Perold et Sharpe développée en 1988 [31] pour présenter ces deux stratégies.

#### 3.1.1 Stratégies buy-and-hold

Les stratégies buy-and-hold sont des stratégies qui achètent les actifs et laissent leur poids flotter suivant l'évolution de leur valeur. Il n'y a donc pas de rebalancement des poids des actifs dans le portefeuille. Lorsque la valeur de l'actif s'élève, toutes choses égales par ailleurs, sa proportion dans le portefeuille va s'élever aussi. Formellement, notons la valeur du portefeuille  $P_t$  pour  $t \geq 1$  et  $A_t$  la valeur des  $n$  actifs le composant en  $t$ . Nous avons ainsi :

$$P_{t+1} = P_t \sum_{i=1}^n \omega_t^i \frac{A_{t+1}^i}{A_t^i}$$

$\omega_t^i$  représente le poids alloué à l'actif  $i$  en  $t$ . Dans une stratégie buy-and-hold, les poids évoluent suivant la valeur relative des actifs, et ont pour expression, pour  $t \geq 2$  (les premiers poids sont déterminés au départ de la stratégie) :

$$\omega_t^i = \omega_{t-1}^i \frac{P_{t-1}}{P_t} \frac{A_t^i}{A_{t-1}^i}$$

Supposons que nous ayons deux actifs, une action et un instrument monétaire sans risque. La valeur du portefeuille de stratégie buy-and-hold a les caractéristiques suivantes :

- elle est linéaire par rapport à la valeur de l'action,
- elle ne diminuera jamais en-dessous de la valeur initiale investie dans l'instrument monétaire,
- elle a un "upside" potentiel illimité, c'est-à-dire un potentiel de gain illimité.

### 3.1.2 Stratégies constant mix

Les stratégies constant mix maintiennent une exposition constante des actifs relativement à la valeur du portefeuille. Les poids n'évoluent donc pas suivant la valeur relative des actifs mais restent fixes. Ainsi, comme les valeurs relatives évoluent, il faut dynamiquement réajuster constamment les proportions investies en valeur dans les actifs pour demeurer à la proportion relative définie au départ.

Ainsi, lorsque la valeur d'un actif diminue, toutes choses égales par ailleurs, la proportion relative de cet actif va diminuer au sein du portefeuille. Il va donc falloir acheter de cet actif pour conserver le même poids au sein du portefeuille. Les poids restent ainsi constants. Pour éviter d'acheter ou de vendre des actifs trop régulièrement et diminuer ainsi les coûts de transaction de la stratégie, il est possible de déterminer des seuils de perte (de gain) en-deçà (au-delà) de laquelle (duquel) on commence à revenir aux poids initiaux. Au-dessus (en-dessous), nous laissons filer les poids comme dans la stratégie buy-and-hold.

Supposons à nouveau un portefeuille composé d'une action et d'un taux sans risque. La stratégie constant-mix va acheter l'action après que celle-ci a diminué et va la vendre après que celle-ci a augmenté. Cette stratégie s'avère alors profitable lorsque des retournements de marché sont fréquents et qu'une augmentation (baisse) de l'action est suivie immédiatement d'une baisse (augmentation). Autrement dit, l'anticipation du gérant est un marché actions fortement volatil et flat.

Perold et Sharpe illustre cette caractéristique à l'aide de l'exemple numérique suivant. Supposons que l'action passe dans un premier temps de 100\$ à 90\$, puis dans un second temps revienne à 100\$, et que le monétaire est supposé constant, pour simplifier les calculs. Dans le cas d'une stratégie buy-and-hold, les poids relatifs au portefeuille ont évolué mais pas la richesse. Dans le cas d'une stratégie constant mix c'est différent (cf. tableau 3.1).

Supposons que nous ayons investi 60% dans l'action et 40% dans l'instrument monétaire. Lors de la baisse de l'action de 100\$ à 90\$, la valeur de l'action dans le portefeuille passe de 60\$ à 54\$. Son poids diminue donc à  $54/94 = 57.4\%$ . C'est le poids de l'action dans la stratégie buy-and-hold. Or dans la stratégie constant mix, nous souhaitons acheter de l'action pour revenir au poids initial de 60%. La valeur correspondante de l'action dans le portefeuille va alors être égale à  $60\% * 94\$ = 56.40\$$ . Nous vendons de manière symétrique  $56.40 - 54 = 2.40\$$  de monétaire : le portefeuille en contient alors 37.60\$.

La hausse de l'action qui va suivre dans le second temps va se révéler profitable à la stratégie constant mix qui vient d'acheter de l'action. En effet, la valeur de l'action dans le portefeuille va passer de 56.40\$ à  $56.40 * 100/90 = 62.67\$$ . La valeur du portefeuille est alors égale à  $37.60 + 62.67 = 100.27\$$ . Contrairement à la stratégie buy-and-hold, qui finit à 100\$, la stratégie constant mix a fait gagner 0.27\$. Le positionnement du gérant, *contrarian* aux évolutions du marché, s'est révélé payant, car l'achat d'action a été suivi immédiatement par une augmentation de sa valeur.

Ensuite, il est nécessaire de rebalancer à nouveau les poids, puisque les 62.67\$ de l'action dans le portefeuille représentent  $62.67/100.27 = 62.50\%$  de la richesse du portefeuille, ce qui est supérieur aux 60% fixés. Il va alors falloir vendre de l'action pour  $62.67 - 60\% * 100.27 = 2.51\$$ . Nous avons à la fin de la seconde période un portefeuille composé de 60.16\$ d'actions et  $37.60 + 2.51 = 40.11\$$  de monétaire. Dans le cas où l'action va baisser au cours de la période suivante, ce rebalancement va s'avérer à nouveau profitable.

	t=0	t=1		t=2	
Évolution Action	100	90		100	
		<i>Buy-and-hold</i>	<i>Constant mix</i>	<i>Buy-and-hold</i>	<i>Constant mix</i>
Valeur action	60	54	56.40	60	60.16
Poids action	60%	57.4%	60%	60%	60%
Valeur monétaire	40	40	37.60	40	40.11
Valeur portefeuille	100	94	94	<b>100</b>	<b>100.27</b>

TABLE 3.1 – Comparaison des stratégies constant mix et buy-and-hold

Un investisseur constant mix anticipe donc des retournements réguliers des actifs composant son portefeuille. Et lorsque le marché est flat et volatil, cette stratégie profitera fortement des retournements de marché.

Au contraire, lorsque le marché a des tendances (trends) de hausse (bull) et de baisse (bear) marquées, la stratégie buy-and-hold sera plus adéquate.

#### Conseil pratique de gestion

*Acheter et ne plus y toucher, ou alors fixer les poids et rebalancer l'allocation régulièrement ? Cette question posée au gérant peut se résoudre suivant ses anticipations : s'il pense que le marché aura une tendance importante de hausse par exemple, il sera préférable d'appliquer la stratégie buy-and-hold ; et lorsqu'il anticipera une volatilité importante avec des retournements réguliers, la stratégie constant mix sera plus profitable.*

## 3.2 Stratégies de couverture du risque

Pour couvrir le risque induit par l'investissement dans des actifs risqués, il est classiquement fait appel à des produits dérivés. En effet, ces produits créés à l'origine pour assurer les entreprises ou particuliers contre la variation défavorable d'un actif se révèlent très utiles. Nous allons tout d'abord revenir sur leur définition et la détermination de leur prix (en se focalisant sur les produits dérivés vanilles que sont les calls). Puis, nous proposerons deux stratégies de couverture du risque : la couverture en Delta et l'Option Based Portfolio Insurance.

La partie de ce cours est dédiée aux stratégies d'investissement. Néanmoins, par souci de clarté, nous ne présenterons pas les stratégies d'investissement associées à la couverture du risque, mais les stratégies statiques de couverture qui constitueront une bonne introduction aux stratégies d'investissement plus complexes.

### 3.2.1 Produits dérivés

Outre lever des fonds à l'aide des actions et des obligations, les entreprises ont besoin de s'assurer contre les incertitudes sur les prix qu'elles peuvent subir. Pour cela, elles vont utiliser un autre type de produit que l'on appelle produits dérivés, car dérivés des produits de base : actions, obligations, mais aussi matières premières, devises, etc. Ces produits existent depuis longtemps mais leur échange s'est amplifié avec l'ouverture du premier marché organisé des options de gré à gré à Chicago en 1973 et la publication la même année de l'article de Black et Scholes *The Pricing of Options and Corporate Liabilities* publié en juin 1973 dans le Journal of Political Economy. Ils s'apparentent à des produits d'échange de risque ou encore d'assurance pour les entreprises contre les incertitudes grandissantes de l'époque sur les prix des instruments financiers fondamentaux.

Ces nouveaux instruments n'étaient pas si *nouveaux* que cela (cf. Bernstein [5]). L'innovation était non pas dans leur fonction mais dans leur distribution au travers de marchés organisés, ainsi que la formalisation de leur prix. En effet, dans l'Antiquité, Aristote raconte dans le livre I de *La Politique* l'histoire de Thalès le Milésien. Ce philosophe, instruit des astres, lut un hiver dans le ciel que la récolte d'olives à l'automne prochain serait très supérieure à la récolte habituelle. Il se garantit alors la priorité sur l'utilisation pour l'automne des presses de la région en échange d'une petite somme d'argent. Il négocia des prix faibles de location car la récolte était éloignée et personne ne prévoyait ce que Thalès anticipait. Lorsque l'automne arriva et que la récolte fût exceptionnelle, il y eût une très importante demande de presses. Thalès sous-loua celles qu'il détenait, pour un prix faible négocié l'hiver, à un prix beaucoup plus conséquent et devint ainsi riche. Cette histoire est la première sur l'utilisation d'*option d'achat*, l'un des produits dérivés les plus communs aujourd'hui.

Les produits dérivés peuvent être de deux natures différentes : les contrats à terme et les options négociables.

#### Contrats à terme

Une opération à terme est une opération au comptant différée dans le temps. L'acheteur et le vendeur se mettent d'accord sur les conditions d'un échange, qui s'effectuera à une date future (maturité) précisée par le contrat à terme. L'échange *doit* être exécuté. Le prix de l'échange est fixé à la date d'élaboration du contrat mais l'échange d'argent n'est effectif qu'à la maturité.

Par exemple, un industriel français achète en dollars des biens d'équipement aux États-Unis. Ces biens ne sont pas encore construits et donc livrables 2 ans plus tard. Or le prix a été fixé aujourd'hui à 1000\$. L'industriel français, qui a une trésorerie en euros, doit convertir le prix des équipements en dollars. Supposons que le taux de change cote aujourd'hui à 1 EUR = 1\$, l'industriel a besoin donc de 1000 EUR. Or cette *conversion* a le temps en 2 ans d'évoluer défavorablement pour l'industriel. Il va donc acheter un contrat à terme qui lui garantit le prix en dollars (contre euros) négocié aujourd'hui pour dans 2 ans. Il se couvre contre un risque de change. Si le cours du dollar s'élève, le taux de change vaut alors à la maturité par exemple 1 EUR = 0.5\$, et l'industriel est protégé : la contrepartie lui fournira 1000\$ contre 1000 EUR ; le contrat à terme lui permettra de payer ses biens non pas 2000 EUR (comme le voudrait le taux de change à

la maturité) mais 1000 EUR (le prix aujourd'hui). Dans le cas contraire, comme l'échange est obligatoire, l'évolution favorable de baisse du dollars, par exemple à 1 EUR = 2\$ (l'euro s'apprécie), n'avantagera pas l'industriel français (il aurait pu payer le bien 500 EUR).

Le prix fixé aujourd'hui et correspondant au montant échangé à maturité d'un contrat à terme peut être calculé sans modélisation du cours du sous-jacent (devise dans notre exemple). En effet, nous utilisons le principe essentiel d'Absence d'Opportunité d'Arbitrage (AOA) sur les marchés, par lequel il est impossible de gagner de l'argent à coup sûr avec un investissement nul. Les *arbitragistes* contraignent à l'unicité des prix des produits dérivés : deux stratégies qui donnent le même flux à maturité ont la même valeur à n'importe quelle date précédant la maturité.

Soit  $F_t(S, T)$  le prix fixé par contrat à la date  $t$  auquel sera négocié le sous-jacent  $S$  à la maturité  $T$ . On l'appelle le prix *forward*. Soit en outre  $B(t, T)$  le prix en  $t$  d'un *zéro-coupon*, qui est un instrument financier qui rapporte 1 à la maturité  $T$ . Pour se garantir de détenir le sous-jacent  $S$  en  $T$ , nous avons le choix entre 2 stratégies :

- souscrire un contrat à terme en  $t$  et verser  $F_T(S, T)$  en  $T$  contre le titre  $S$ ,
- acheter le titre  $S$  en  $t$  et le conserver jusqu'en  $T$ .

Ces 2 stratégies conduisent au même flux  $S_T$  en  $T$ . Pour garantir le paiement du contrat *forward* en  $T$ , il faut acheter la quantité  $F_t(S, T)$  de zéro-coupon, qui permettra de détenir à maturité le montant  $F_T(S, T)$ . A partir de l'égalité des flux à tout moment (AOA), nous avons :

$$F_t(S, T) * B(t, T) = S_t$$

et donc le montant échangé à la maturité du contrat à terme est fixé aujourd'hui ( $t = 0$ ) à :

$$F_0(S, T) = \frac{S_0}{B(0, T)}$$

### Options négociables

Les options négociables sont des contrats permettant (il n'y a pas obligation) à son détenteur d'acheter (*call*) ou de vendre (*put*) une certaine quantité de biens à un cours fixé à la signature du contrat, appelé prix d'exercice (*strike*)  $K$  à la date  $T$ , maturité de l'option (cas des options *européennes*) ou jusqu'à  $T$  (cas des options *américaines*).

Dans le cas de l'exemple de l'industriel français achetant un bien en dollars, il peut acheter une option d'achat européenne aujourd'hui, au lieu d'un contrat à terme, lui donnant le droit, suivant la situation à maturité, d'acheter les 1000\$ à 1000 EUR en  $T$ . Si le cours du dollar s'élève, alors il aura intérêt à exercer son option d'achat. Dans le cas contraire, il n'exerce pas son option et paye donc 500 EUR, ce qui est intéressant puisque la couverture protège de la hausse du dollar et donc l'industriel peut aussi, avec cet instrument, profiter de sa baisse. Cette différence, par rapport au contrat à terme, a cependant un coût puisque l'acheteur de l'option paye une prime à la signature du contrat. Le risque est limité à la prime payée. Cette dernière nécessite pour son calcul une modélisation plus complexe que la simple utilisation *statique* de l'AOA. En effet, le flux final (*payoff*) est plus complexe que celui du contrat à terme puisqu'il a un caractère optionnel et que la trajectoire du sous-jacent est à prendre en compte dans l'évaluation du prix de l'option.

L'objet de la suite du cours est non pas d'entrer dans les détails complexes de calcul stochastique de la prime d'une option (pour cela nous nous référons aux livres de Dana et Jeanblanc-Picqué [10], Lamberton et Lapeyre [22], et Musiela et Rutkowski [29]) mais d'en comprendre la logique sous-jacente. Nous nous intéresserons seulement à l'évaluation d'un call européen dans le cadre de Black et Scholes, sans entrer dans les calculs mais en développant ses hypothèses essentielles.

*Payoff d'un call européen*

Avant toutes choses, tentons d'exprimer le flux final ou payoff d'un call européen. A la maturité, en  $T$ , le profit réalisé par l'acheteur du call dépend de la valeur du sous-jacent par rapport au prix d'exercice du call. En effet, si la valeur du sous-jacent  $S_T > K$ , le détenteur du call exerce l'option puisque le sous-jacent est devenu trop cher. Il gagne donc la différence  $S_T - K$ , s'il revendait sur le marché, par exemple, instantanément le sous-jacent acheté au prix  $K$  et de valeur de marché  $S_T$ .

Au contraire, si  $S_T \leq K$ , il n'a aucun intérêt à exercer l'option d'achat, puisque le sous-jacent est moins cher sur le marché. Dans ce cas, il ne gagne rien (il a seulement payé la prime en 0).

Au final, nous pouvons exprimer le gain ou payoff final comme le maximum entre  $S_T - K$  et 0. Le payoff dépend donc de la valeur du sous-jacent à la maturité, par essence imprévisible. Ainsi :

$$\text{payoff} = \max(S_T - K, 0) = (S_T - K)^+$$

Nous voyons bien que l'acheteur d'un call européen anticipe donc une hausse du sous-jacent et se couvre ainsi contre le risque de hausse du marché. De manière symétrique, le vendeur anticipe une baisse (objectif de percevoir la prime sans que l'option s'exerce). Cette logique est valable aussi pour le put : l'acheteur se couvre contre une baisse du sous-jacent.

*Effet de levier*

Le gain pour un call  $S_T - K$  possible est sans commune mesure avec celui fait sur le sous-jacent, relativement à l'investissement initial. Ce phénomène s'appelle l'effet de levier.

Lorsque l'on achète le sous-jacent d'un call à la monnaie en  $t$  de maturité  $T$ , la rentabilité est égale à :

$$r_{t|T} = \frac{S_T}{S_t} - 1 = \frac{S_T}{K} - 1$$

Lorsque l'on achète le call, la rentabilité est :

$$r_{t|T}^c = \frac{(S_T - K)^+}{C_t} - 1$$

Si  $S_T > K$ , alors le call est exercé et la rentabilité devient :

$$r_{t|T}^c = \frac{S_T - K}{C_t} - 1$$

Si  $S_T < K$ , alors le call n'est pas exercé et la rentabilité devient :

$$r_{t|T}^c = -100\%$$

Soit l'application numérique suivante :  $S_t = 98$ ,  $K = 100$  et  $C_t = 4.8$ .

Dans le cas où  $S_T = 107$  :

$$r_{t|T} = \frac{107}{98} - 1 = 9.2\%$$

$$r_{t|T}^c = \frac{107 - 100}{4.8} - 1 = 45.8\%$$

Dans le cas où  $S_T = 100$  :

$$r_{t|T} = \frac{100}{98} - 1 = 2.4\%$$

$$r_{t|T}^c = \frac{100 - 100}{4.8} - 1 = -100\%$$

L'achat de call est donc beaucoup plus risqué, à cause de l'effet de levier induit.

*Probabilité d'exercer un call*

La probabilité d'exercer le call est intégrée dans un indicateur appelé le Delta  $\Delta$  qui exprime la sensibilité de la variation du prix du call relativement à celle du sous-jacent. Cette sensibilité évolue au cours du temps, et plus elle est proche de 1, plus l'exercice est probable. Nous pouvons associer les valeurs du  $\Delta$  à la probabilité d'exercer le call ainsi qu'au payoff probable, dans les trois cas de figure suivants :

$\Delta$	Probabilité d'exercice	Payoff probable	Position
$\Delta \rightarrow 1$	Forte	$S_T > K$	Dans la monnaie
$\Delta \rightarrow 0.5$	Aussi faible que forte	$S_T = K$	A la monnaie
$\Delta \rightarrow 0$	Faible	$S_T < K$	En dehors de la monnaie

TABLE 3.2 – Delta et probabilité d'exercice

L'objectif du spéculateur va être d'acheter en dehors de la monnaie : en effet, le produit dérivé est alors peu cher, car la probabilité d'exercice est faible et la possibilité de gain importante, si le sous-jacent monte pour un call, baisse pour un put. L'effet de levier associé au produit dérivé permet alors de forts gains. Ceci explique pourquoi les échanges sur les produits dérivés ont explosé : ceci n'est pas seulement dû à leur utilisation par les entreprises mais surtout à celle faite par les spéculateurs.

*Évaluation d'un call européen Black-Scholes*

Ce paragraphe est mathématiquement plus poussé donc peut-être négligé par les étudiants n'ayant pas le niveau pré-requis.

L'objectif est d'évaluer le prix aujourd'hui en 0 d'un flux  $h(S_T) = (S_T - K)^+$  qui ne sera connu qu'à la maturité  $T$ . La méthode utilisée est de construire une stratégie  $\varphi$  qui réplique le même payoff  $h(S_T)$  en  $T$ . Nous aurons à notre connaissance le prix de ce portefeuille à tout instant et par là même, nous obtiendrons le prix du call en 0 par AOA. En effet, rappelons que deux stratégies ayant même flux en  $T$  auront même valeur  $\forall t$ .

La stratégie de réplcation  $\varphi$  aura comme caractéristique essentielle l'auto-financement : un portefeuille auto-finançant est une stratégie financière d'achat et de vente d'actifs dont la valeur n'est pas modifiée par le retrait ou l'ajout de *cash* de manière extérieure. Les variations du portefeuille sont dues aux seules variations du cours des actifs. La stratégie va être une combinaison linéaire de 2 actifs : le sous-jacent (action, matière première, devise)  $S$  et l'actif sans risque  $S^0$ . Elle aura pour valeur  $V_t(\varphi) = \varphi_t S_t + \varphi_t^0 S_t^0$ . Dans le cadre de la modélisation de Black et Scholes, des hypothèses, assez restrictives mais permettant d'obtenir une écriture fermée du prix d'un call, sont énoncées :

- le sous-jacent (l'actif risqué) suit un mouvement Brownien géométrique sous la probabilité historique  $P$  dont l'équation différentielle stochastique (EDS) s'écrit  $dS_t = S_t(\mu dt + \sigma dW_t)$ , avec  $W_t$  un mouvement Brownien standard. Nous en concluons à partir du lemme d'Itô que  $S_t = S_0 \exp \left[ \left( \mu - \frac{\sigma^2}{2} \right) t + \sigma W_t \right]$  et donc les rentabilités du sous-jacent suivent une loi Normale  $\mathcal{N} \left( \mu - \frac{\sigma^2}{2}, \sigma^2 \right)$ .
- l'actif sans risque (*cash*) est déterministe (non aléatoire) et sa dynamique est représentée par l'EDS  $dS_t^0 = S_t^0 r dt$ . Ainsi,  $S_t^0 = \exp(rt)$ .

Un résultat essentiel est la fait que si le processus actualisé  $\bar{S}_t = \frac{S_t}{S_t^0}$  (écrit dans le numéraire *cash*) est une martingale, alors la valeur financière actualisée  $\bar{V}_t(\varphi) = \frac{V_t(\varphi)}{S_t^0}$  d'un portefeuille auto-finançant est une martingale.

Nous allons donc déterminer une probabilité  $\mathbb{Q}$  équivalente à la probabilité  $P$  sous laquelle  $\bar{S}_t$  est une

martingale. A partir du théorème de Girsanov, nous savons que le processus d'EDS  $d\bar{S}_t = \bar{S}_t \sigma d\bar{W}_t$ , avec  $\bar{W}_t = W_t + \lambda t$  et  $\lambda = \frac{\mu - r}{\sigma}$ , est un mouvement Brownien sous  $\mathbb{Q}$ , probabilité appelée *risque-neutre* car l'actif risqué a même rendement que l'actif sans risque :  $dS_t = S_t(rdt + \sigma d\bar{W}_t)$  sous  $\mathbb{Q}$ . Nous avons tous les éléments essentiels au *pricing* d'un call européen.

Nous supposons le marché *complet*. Cette hypothèse implique que la probabilité *risque-neutre*  $\mathbb{Q}$  est unique et permet ainsi de garantir l'existence d'une stratégie  $\varphi$  auto-finançante qui réplique le flux final du call européen et dont la valeur actualisée est une martingale sous  $\mathbb{Q}$ . En conséquence, le prix du call est unique. La stratégie  $\varphi$  a pour valeur à la maturité  $V_T(\varphi) = h(S_T) = (S_T - K)^+$  et ainsi  $\forall t \leq T$ , nous avons, avec la tribu  $F_t$  représentant l'information disponible à la date  $t$  :

$$\begin{aligned}\bar{V}_t(\varphi) &= \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[\bar{V}_T(\varphi) | F_t] \\ V_t(\varphi) &= e^{-r(T-t)} \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[h(S_T) | F_t] \\ V_t(\varphi) &= e^{-r(T-t)} \mathbb{E}_{\mathbb{Q}} \left[ h \left( S_t \exp \left( \left( r - \frac{\sigma^2}{2} \right) (T-t) + \sigma (\bar{W}_T - \bar{W}_t) \right) \right) | F_t \right]\end{aligned}$$

Or  $\bar{W}_T - \bar{W}_t$  est indépendant de  $F_t$  et  $S_t$  est  $F_t$  mesurable. Donc  $V_t(\varphi) = \Psi(T-t, S_t)$  avec :

$$\begin{aligned}\Psi(T-t, x) &= e^{-r(T-t)} \mathbb{E}_{\mathbb{Q}} \left[ h \left( x \exp \left( \left( r - \frac{\sigma^2}{2} \right) (T-t) + \sigma (\bar{W}_T - \bar{W}_t) \right) \right) \right] \\ &= e^{-r(T-t)} \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}^x [h(S_{T-t})]\end{aligned}$$

Le prix du call européen  $C_0$  aujourd'hui, similaire à celui de la stratégie  $\varphi$   $V_0(\varphi)$ , est alors (nous ne décrivons pas ici les différents calculs qui aboutissent à ce résultat, cf. par exemple Musiela et Rutkowski [29]) :

$$C_0 = x\Phi(d_1) - Ke^{-rT}\Phi(d_0)$$

avec  $x = S_0$ ,  $\Phi(\cdot)$  la fonction de répartition de la loi Normale centrée et réduite,  $d_0 = \frac{1}{\sigma\sqrt{T}} \left[ \left( r - \frac{\sigma^2}{2} \right) T + \ln \frac{x}{K} \right]$

et  $d_1 = d_0 + \sigma\sqrt{T}$ .

Pour tout  $t < T$ , nous avons :

$$C_t = S_t\Phi(d_1) - Ke^{-r(T-t)}\Phi(d_0)$$

avec  $d_0 = \frac{1}{\sigma\sqrt{T-t}} \left[ \left( r - \frac{\sigma^2}{2} \right) (T-t) + \ln \frac{S_t}{K} \right]$  et  $d_1 = d_0 + \sigma\sqrt{T-t}$ .

Nous avons ainsi obtenu la formule fermée d'évaluation du prix d'un call européen dans le cadre de la modélisation de Black et Scholes.

Des modèles plus raffinés pour le *pricing* de produits dérivés ont été mis en place comme ceux à volatilité stochastique (Heston) par exemple prenant en compte la caractéristique non gaussienne des actifs financiers. Ceci n'est pas l'objet de ce cours.

### Volatilité implicite

La volatilité est en effet dans la réalité non constante. Ceci est révélé par un indicateur très usité dans la pratique : la volatilité implicite.

Les agents des marchés financiers évaluent les calls et puts non pas à l'aide de leur prime mais à l'aide de l'unique paramètre pouvant être évalué différemment suivant les agents dans l'évaluation de Black-Scholes :  $\sigma$ . Et l'on va parler alors de volatilité implicite, déterminée comme la valeur de la volatilité que les agents ont utilisée pour pricer le produit dérivé. La relation entre prime du call, et du put, et volatilité implicite est positive : plus la volatilité implicite sera élevée, plus les agents anticiperont une variabilité importante et donc une incertitude du marché plus forte, et plus il coûtera cher d'acheter un produit dérivé étant donnée l'incertitude élevée concernant la valeur du sous-jacent à maturité.

Il est intéressant en outre de préciser que la volatilité implicite n'est pas constante suivant la position du strike par rapport à la valeur du sous-jacent : à la monnaie, la volatilité implicite est la plupart du temps à son point le plus bas, et plus on s'éloigne de la monnaie, plus elle est élevée. On appelle ce phénomène le *smile* de volatilité.

Ce *smile* se révèle être souvent un *skew*, car la volatilité implicite est plus élevée pour des valeurs du sous-jacent faibles (achat de puts pour se couvrir contre la baisse des marchés) que pour des valeurs élevées (achat de calls). En effet, la demande de couverture contre la baisse du marché est plus forte que celle contre la hausse : les agents seront plus sensibles au risque de baisse qu'au risque de hausse.

### 3.2.2 Couverture en delta statique

A partir de ces produits dérivés, nous sommes capables de développer des stratégies d'immunisation contre la variation du sous-jacent. La première est la couverture en delta, combinant call et sous-jacent.

La valeur d'un portefeuille  $V_t$  composé d'un call et de son sous-jacent est en 0  $V_0 = \alpha C_0 + \beta S_0$ . Ce portefeuille est insensible au cours du sous-jacent si le portefeuille a une variabilité par rapport au sous-jacent nulle, c'est-à-dire si  $\frac{\partial V_0}{\partial S} = \alpha \frac{\partial C_0}{\partial S} + \beta = 0$ . Or l'indicateur Delta du call en 0 est  $\Delta_0 = \frac{\partial C_0}{\partial S} = \Phi(d_1)$  et donc nous obtenons :  $\beta = -\alpha \Phi(d_1)$ . Le portefeuille de couverture est donc composé de l'achat d'un call par exemple et de la vente de  $\Phi(d_1)$  sous-jacent.

Si nous fixons ce Delta pour toute la période d'immunisation (la proportion de sous-jacents est donc fixée à  $\Delta_0$ ), nous produisons une couverture statique non optimale car le Delta a besoin d'être ajusté au cours du temps et de l'évolution du sous-jacent. Cette couverture non dynamique peut être améliorée à l'aide d'une couverture dynamique qui dépasse le cadre de ce cours.

### 3.2.3 Assurance de portefeuille

L'objectif de gestion en assurance de portefeuille est d'assurer un portefeuille actions contre une perte importante ; les techniques quantitatives sont essentiellement issues de l'utilisation des produits dérivés ainsi que de l'estimation de la perte contre laquelle le gérant veut se protéger.

Nous définissons un horizon  $T$  de gestion ainsi qu'une valeur plancher  $F_T$  en-dessous de laquelle la valeur du portefeuille ne doit pas tomber à l'horizon. Un cas particulier classique est celui de la garantie de la valeur initiale du portefeuille à horizon. Trois types de stratégie sont présentées :

1. la stratégie stop-loss,
2. la stratégie optionnelle,
3. la stratégie du coussin.

#### Stratégie stop-loss

Cette méthode est la plus simple. Nous considérons un portefeuille dont l'univers de gestion se réduit à un indice actions et à un actif monétaire sans risque. Le *stop-loss* est habituellement utilisé pour garantir un portefeuille investi entièrement en actif risqué, ici en actions.

La méthode stop-loss consiste à vendre l'indice actions lorsque la valeur de ce dernier touche la valeur plancher, et consécutivement à placer l'argent au taux sans risque. Le gérant achètera à nouveau l'indice actions lorsque la valeur de ce dernier repassera au-dessus de la valeur plancher. Nous allons décrire cette méthode à l'aide d'un exemple numérique simple.

Supposons une discrétisation du temps en 5 périodes. La valeur plancher est fixée à la date  $T = 5$  (horizon de gestion) à  $F_T = 100$ , valeur de l'indice actions à la date initiale  $t = 0$ . Le taux d'intérêt est supposé constant et égal sur les 5 périodes à  $r_f = 2\%$ . La valeur du plancher  $F_T$  doit donc être actualisée<sup>1</sup> pour

1. Le taux entre 2 dates est égal à  $(1 + r_f)^{\frac{1}{T}} - 1 = (1 + 0.02)^{\frac{1}{5}} - 1 \approx 0.40\%$ .

déterminer  $F_t$  à la date  $t \leq T$  :

$$F_t = \frac{F_T}{(1 + r_f)^{\frac{T-t}{T}}}$$

Ainsi, la valeur initiale  $F_0$  du plancher garantissant une valeur du portefeuille supérieure ou égale à 100 à horizon est égale à :

$$F_0 = \frac{100}{1 + 0.02} \approx 98.04$$

Cette valeur évolue bien sûr à chaque date. L'indice actions évolue aussi mais de manière plus erratique. Son niveau va déterminer la composition du portefeuille stop-loss : vente de l'indice actions lorsque le plancher est traversé, achat lorsque l'indice actions rebondit au-dessus du plancher. Nous supposons aussi qu'il n'y a pas de coûts de transaction.

Enfin, ajoutons que, dans la pratique, il n'est pas possible de transférer l'investissement juste au moment où l'actif risqué touche le plancher : il y a toujours un délai, ce qui est pris en compte dans l'exemple numérique.

Date	Plancher	Monétaire	Actions	Portefeuille		
				Actions	Monétaire	Total
0	98.04	100	100	100	0	100
1	98.43	100.40	105	105	0	105
2	98.82	100.80	98	0	98	98
3	99.21	101.20	97	0	98.39	98.39
4	99.60	101.60	102	98.78	0	98.78
5	100	102	106	102.65	0	102.65

TABLE 3.3 – Stratégie stop-loss

A la date 2, la valeur de l'indice actions (98) passe en-dessous de la valeur actualisée du plancher (98.82) : le gérant réinvestit alors tout son capital dans l'actif monétaire sans risque. A la date 4, la valeur de l'indice actions (102) est supérieure à celle du plancher actualisée (99.60) : c'est donc le signal pour transférer le capital dans l'indice actions pour la dernière période. On voit bien que le décalage temporel du premier transfert fait que cette stratégie n'est pas optimale car à la date 4, la valeur du portefeuille (98.78) est en revanche inférieure à celle du plancher. Le gérant, par chance dans cet exemple, a acheté l'indice actions juste avant une nouvelle hausse de ce dernier.

Cette stratégie simple a plusieurs limites :

1. les transferts de capital sont très importants. C'est tout ou rien : le portefeuille stop-loss est investi soit entièrement en actions, soit entièrement en monétaire. Les coûts de transaction peuvent alors être prohibitifs.
2. cette stratégie fonctionne lorsqu'il y a des tendances marquées sur le marché actions. En effet, on investit dans les actions après que la valeur de ces dernières a monté. Pour en retirer un profit, il faut qu'à la période suivante, les actions continuent de monter. Dans notre exemple, si les actions avaient subi une baisse entre les dates 4 et 5, la valeur du portefeuille à l'horizon aurait été inférieure au plancher. La garantie du capital n'est donc pas assurée dans un marché volatil, sauf à supposer que le transfert de capital entre actions et monétaire est réalisé juste au moment où le portefeuille touche le plancher, ce qui n'est malheureusement pas réaliste dans la pratique.

Les 2 méthodes suivantes vont permettre de dépasser les limites de la stratégie stop-loss.

### Stratégie optionnelle

Pour introduire les stratégies optionnelles, prenons l'exemple d'un portefeuille dont le capital initial est de 100 et qui garantit 100% du capital dans 2 ans. On va alors acheter un zéro-coupon qui aura pour valeur 100 dans deux ans et dont la valeur aujourd'hui est  $\frac{100}{(1+r_f)^2} \approx 96$ , avec  $r_f = 2\%$  le taux d'intérêt sans risque. On peut donc *risquer* ce qui reste du portefeuille, c'est-à-dire environ  $100 - 96 = 4$ , en étant certain de garantir dans les 2 ans 100% du capital initial investi. Avec ces 4, on achète des calls. Ceci permettra de profiter d'une partie de la hausse du marché actions sans prendre aucun risque. Le portefeuille ainsi géré est un fonds fermé à capital garanti, c'est-à-dire qu'on structure l'allocation au départ et on ne la change plus jusqu'à l'horizon.

Les stratégies optionnelles sont aussi dénommées *Option Based Portfolio Insurance* ou OBPI, et sont des *structures* simples permettant de garantir le capital d'un portefeuille d'actifs risqués.

La première méthode d'assurance de portefeuille à base d'options a été introduite par Leland et Rubinstein en 1976. Elle consiste à investir dans un actif risqué  $S$  couvert par un put sur cet actif. Cette stratégie permet, quelle que soit la valeur de l'actif risqué à l'échéance du put, de garantir un capital minimum égal au prix d'exercice  $K$  du put. Le plancher devient alors dans cette stratégie le strike du put  $F_T = K$  et l'horizon la maturité  $T$  du put.

Cette stratégie se trouve être équivalente à celle qui achète  $K$  zéro-coupon de nominal 1 et un call de prix d'exercice  $K$ . Pour comprendre cela, il est tout d'abord nécessaire de définir la formule de parité call-put permettant de donner le prix d'un put européen  $P_t$  à partir de celui d'un call européen  $C_t$  en  $t$  :

$$C_t - P_t = S_t - Ke^{-r(T-t)}$$

Pour démontrer cette formule, il suffit de construire deux stratégies ayant les mêmes flux à maturité et d'utiliser l'AOA.

Soit la première stratégie qui consiste à acheter un call et à vendre un put, sur le même actif, de mêmes maturités et prix d'exercice. En  $t < T$ , ce portefeuille a pour valeur  $C_t - P_t$ , et en  $t = T$ ,  $(S_T - K)^+ - (K - S_T)^+ = S_T - K$ .

La seconde stratégie, consistant à acheter le titre et à vendre  $K$  zéro-coupon d'échéance  $T$ , a le même flux en  $T$ , c'est-à-dire  $S_T - K$ . Et cette stratégie a pour valeur en  $t < T$  :  $S_t - Ke^{-r(T-t)}$ . Ainsi, par AOA, nous retrouvons la formule de parité call-put.

D'après cette dernière, la valeur de la stratégie OBPI est égale à :

$$\begin{aligned} V_t &= S_t + P_t = Ke^{-r(T-t)} + C_t \quad \forall t < T \\ V_T &= S_T + (K - S_T)^+ = K + (S_T - K)^+ \text{ à l'échéance } T \end{aligned}$$

Ces stratégies, utilisant soit un put, soit un call, garantissent bien le capital  $K$  à échéance  $T$  puisque :

$$V_T = \begin{cases} S_T & \text{si } S_T > K \\ K & \text{si } S_T \leq K \end{cases}$$

En plus de garantir le capital dans le cas de marché baissier, ces stratégies permettent, en outre, de profiter sensiblement de la hausse des marchés, c'est-à-dire lorsque  $S_T > K$ . En effet, nous avons alors pour une stratégie optionnelle utilisant un put :

$$\frac{V_T}{V_0} = \frac{S_T}{S_0} \frac{S_0}{S_0 + P_0}$$

Ainsi, la stratégie profite d'une hausse un peu inférieure, le facteur  $\frac{S_0}{S_0 + P_0}$  est inférieur à 1, à celle des marchés actions tout en conservant le capital. Précisons que plus le plancher est élevé, plus le prix d'exercice du put s'élève et donc plus le put est cher. La garantie devient logiquement plus chère et le gain suite à

une hausse des actions moins élevée puisque l'exposition aux actions sera plus faible.

Dans le cas de la stratégie OBPI avec un call, si les marchés montent, le portefeuille profite de cette hausse à hauteur du *gearing*. Le portefeuille est composé d'un actif monétaire sans risque valant la garantie à échéance  $T$  et le reste est investi dans des calls. Le *gearing* est le niveau d'exposition du portefeuille à l'actif risqué via les calls déterminé de la manière suivante :

$$g = \frac{V_0 - F_0}{C_0} * \frac{S_0}{V_0}$$

Ce *gearing*, inférieur à 1, évalue la participation du portefeuille OBPI avec calls à la hausse de l'indice actions.

Une limite apparaît lorsqu'il n'existe pas de produits dérivés sur le sous-jacent géré. La solution est alors de répliquer la stratégie optionnelle à l'aide d'une allocation en actif monétaire et sous-jacent. Néanmoins, cette réplique n'assurera pas aussi parfaitement le portefeuille.

Partant de la stratégie OBPI avec un put et utilisant le pricing du call de Black et Scholes, nous obtenons :

$$\begin{aligned} V_t &= S_t + P_t \\ &= Ke^{-r(T-t)} + C_t \quad \forall t < T \\ &= Ke^{-r(T-t)} + S_t \Phi(d_1) - Ke^{-r(T-t)} \Phi(d_0) \\ &= S_t(1 + \Delta_t^P) + Ke^{-r(T-t)}(1 - \Phi(d_0)) \end{aligned}$$

$$\text{avec } d_0 = \frac{1}{\sigma\sqrt{T-t}} \left[ \left( r - \frac{\sigma^2}{2} \right) (T-t) + \ln \frac{S_t}{K} \right] \text{ et } d_1 = d_0 + \sigma\sqrt{T-t}.$$

Cette expression nous permet de déterminer les allocations du portefeuille OBPI en actions et actif monétaire qui permettent de répliquer la stratégie optionnelle OBPI. Cette stratégie revient donc à investir en  $t$   $\frac{(1 + \Delta_t^P) S_t}{S_t + P_t}$  en actions et le reste en actif monétaire.

Les limites de ces stratégies OBPI sont consécutives à l'utilisation de produits dérivés. En effet, les hypothèses de leur évaluation peuvent poser problème (volatilité constante, diffusion gaussienne).

En outre, il est nécessaire de fixer un horizon. La dernière méthode va permettre de s'exonérer de la fixation de l'horizon : elle sera alors utilisée pour les fonds non plus fermés mais *ouverts*.

Enfin, les coûts de transaction peuvent être parfois importants dans le cadre de la réplique de la stratégie optionnelle.

### Stratégie du coussin

La stratégie du coussin ou *Constant Proportion Portfolio Insurance* (CPPI) est une méthode relativement flexible.

Reprenons l'exemple précédent d'un portefeuille dont le capital initial est de 100 et qui garantit cette fois 95% de sa valeur à chaque instant. Il est composé d'un zéro-coupon et d'un actif risqué, un indice actions par exemple. La logique à première vue voudrait que l'on investisse 95 en zéro-coupon et seulement 5 en actions. Ces 5 correspondent à ce que l'on appelle le *coussin*, différence entre la valeur du portefeuille et la valeur plancher (valeur capitalisée de la garantie).

Mais cette logique fait l'hypothèse implicite que le marché actions peut subir une perte de -100% en un seul jour (si on suppose que l'allocation évolue quotidiennement), ce qui est peu vraisemblable. Ainsi, il est donc possible de *risquer* plus que le coussin à hauteur de la perte maximale potentielle que pourrait subir le marché actions.

Pour estimer cette perte potentielle ou *indice de stress*, il est classique d'introduire la notion de temps de retour  $\tau$  de cette perte, fixé généralement entre 30 et 50 ans.  $\tau$  permet alors de définir la probabilité qui

déterminera le quantile de perte maximale tolérable pour la stratégie du coussin. Cette probabilité est égale à  $\frac{1}{252 * \tau}$ , 252 correspondant au nombre de jours généralement tradés sur un an. La Théorie des Valeurs Extrêmes peut être mobilisée dans le calcul de cet indice de stress.

Supposons que ce dernier vaille 15% pour un temps de retour  $\tau = 50$  ans. Ceci signifie que le marché subit une perte inférieure à -15% une fois tous les 50 ans. Le marché peut donc perdre en une journée au maximum 15% et non pas 100%. En d'autres termes, sur un portefeuille de valeur 100, on peut perdre au maximum 15 ; comme dans notre portefeuille, on peut perdre au maximum 5 (la garantie est de 95%), on peut donc investir  $5 * \frac{100}{15} = 5 * 6.67 \approx 33.35$ . L'inverse de l'indice de stress  $\frac{100}{15}$  s'appelle le multiplicateur. Si on investit en actif risqué 33.35, on est relativement certain de perdre au maximum 5 et on dépassera le plancher seulement une fois tous les 50 ans.

L'exposition  $e$  en actions est donc un multiplicateur  $m$  du coussin  $c$  :  $e = c * m$ . Le reste est investi en actif monétaire. La valeur du coussin évolue au cours du temps avec l'évolution du plancher, capitalisé, et celle de l'indice actions. Le montant investi en actions  $e$  doit toujours être défini par un même multiple  $m$  du coussin. Pour éviter les rebalancements trop fréquents, il est communément déterminé une tolérance sur le multiplicateur  $m$  (par exemple 10%).

Plus le multiplicateur est faible, plus la garantie est certaine ; plus le multiplicateur est élevé, plus le portefeuille profite de la hausse du marché actions.

Des stratégies de coussin dynamiques, donc plus complexes, peuvent être aussi mises en place : nous pensons aux stratégies Dynamic Portfolio Insurance (DPI), déterminant un coussin dynamique, ou encore les stratégies Time Invariant Portfolio Protection (TIPP) contraignant la valeur plancher à évoluer non plus en fonction du taux sans risque mais en fonction de la valeur du portefeuille.

#### **Conseil pratique de gestion**

*Couvrir le risque pour un gérant peut se faire à moindre frais (produits dérivés relativement peu chers) et permettre de s'assurer facilement contre la baisse par exemple des actifs dans lesquels il a investi. Les stratégies présentées ci-dessus sont statiques mais existent aussi en version dynamique, permettant ainsi une couverture plus optimale.*

### 3.3 Stratégies de création de performance

Pour créer de la performance, il est possible de construire ce que l'on appelle des moteurs de performance quantitatifs et financières. Ceci va souvent s'intégrer dans une gestion que l'on dénomme *core-satellite* avec un coeur d'allocation classique et des satellites développant des stratégies quantitatives performantes.

Deux types de stratégies sont possibles : les stratégies *long-only* qui achètent seulement lorsque le signal quantitatif défini sur une classe d'actifs est positif, et les stratégies *long-short* qui vendent en plus lorsque les signaux du modèle sont négatifs.

Avant d'énumérer certaines stratégies quantitatives, il est nécessaire de présenter brièvement la mise en pratique de la technique de régression, qui sera à la base de nombreuses stratégies.

#### *Mise en pratique de la régression*

Nous n'allons pas rappeler les fondements mathématiques du modèle de régression linéaire mais plutôt expliciter comment mettre en oeuvre cette technique sur des échantillons de données. Trois points essentiels sont abordés pour éviter tout problème d'analyse :

1. Au préalable, il est primordial d'éviter toute régression fallacieuse (*spurious regression*), c'est-à-dire un modèle essayant de régresser une variable intégrée d'ordre 1 (non-stationnaire) sur d'autres variables non-stationnaires. Ce problème a été mis en évidence par Granger et Newbold [17]. Une régression fallacieuse va conclure à des relations erronées entre variables, car statistiquement invalides. Il est donc primordial de travailler avec des données stationnaires (les rentabilités le sont par exemple).
2. En outre, un problème peut apparaître lorsque l'estimateur  $\hat{\beta}$  se révèle instable suivant des sous-échantillons de l'échantillon total des données de taille  $n$ . En effet, il n'est pas rare que les sensibilités  $\hat{\beta}$  évoluent dans le temps par exemple. Quelles méthodes d'estimation utiliser alors pour capter la variabilité des  $\hat{\beta}$ ? La question essentielle qui se pose est en fait celle de la partie de l'échantillon total des données à considérer pour déterminer les paramètres de la régression. Deux possibilités s'offrent à nous :
  - Soit on fixe le point de départ de la construction du sous-échantillon  $(y_1, \dots, y_{n_r})$  et on *empile* les données au fur et à mesure qu'elles apparaissent : le deuxième sous-échantillon devient alors  $(y_1, \dots, y_{n_r+1})$  et ainsi de suite. On réalise des régressions récursives.
  - Soit on fixe une taille d'échantillon  $n_g$  inférieure à  $n$  et on construit plusieurs sous-échantillons de taille  $n_g$  au sein de l'échantillon total. On fait ainsi *glisser* nos échantillons, de taille fixe  $n_g$ , au fur et à mesure du temps :  $(y_1, \dots, y_{n_g})$  pour le premier sous-échantillon,  $(y_2, \dots, y_{n_g+1})$  pour le deuxième, et ainsi de suite. On réalise alors des régressions glissantes.

Pour capter la réactivité des  $\hat{\beta}$ , nous privilégierons la régression glissante. Le choix de la taille  $n_g$  (comme pour celui de  $n_r$ ) des sous-échantillons glissants n'a pas de règle figée. En fait, il dépend d'un arbitrage entre réactivité des estimateurs et bonnes propriétés statistiques. L'objectif étant de capter le plus précisément possible le moment où le régime des  $\hat{\beta}$  a changé, plus l'échantillon sera de petite taille, moins il sera pollué par les valeurs du passé mais plus il aura des propriétés statistiques mauvaises.

3. Enfin, il va falloir évaluer le pouvoir prévisionnel du modèle pour les stratégies de prévision. On réalise alors un backtest de nos stratégies. Le principe du backtest est de distinguer sur l'échantillon total des données un sous-échantillon d'apprentissage de taille  $n_a$  sur lequel on va estimer les paramètres du modèle et un sous-échantillon de backtest de taille  $n_b$  sur lequel on va tester la robustesse du modèle. Deux indicateurs peuvent alors être déterminés :

- Le Root Mean Squared Error (RMSE) égal à  $\sqrt{\frac{1}{n_b} \sum_{i=1}^{n_b} (\hat{y}_i - y_i)^2}$  avec  $\hat{y}_i$  la valeur prévue par le modèle défini sur l'échantillon d'apprentissage à partir des observations  $x_i$  de l'échantillon de backtest ; ces  $n_b$  prévisions sont alors comparées aux valeurs  $y_i$  de l'échantillon de backtest réellement réalisées.

- Le taux de bon classement égal à  $\frac{\text{card}[\hat{y}_i * y_i > 0]}{n_b}$  permettant de juger le bon sens de la prévision  $\hat{y}_i$ . Il est possible d'ajouter des seuils pour ne prendre en compte que les prévisions importantes en valeur absolue, c'est-à-dire celles qui font gagner de l'argent.

Ces indicateurs déterminés sur les modèles de régression sont à comparer à un modèle de prévision naïve, prévoyant pour la valeur de demain la valeur d'aujourd'hui : on l'appelle la marche aléatoire. Elle signifie que les marchés sont efficients et qu'aucune information passée ne peut aider à prévoir le prix d'un actif.

### 3.3.1 Stratégies actions

Les stratégies développées sur les actions sont nombreuses.

#### Stratégies de style

Tout d'abord elles peuvent associer aspects qualitatifs et quantitatifs : ceci est le cas pour les stratégies de style, de capitalisation ou sectorielles. Ainsi, la segmentation va être qualitative, via la distinction entre actions *Growth* et *Value*, Small Cap, Mid Cap et Large Cap ou encore les secteurs, mais aussi quantitative puisque ces distinctions sont fondées sur des ratios financiers, sensibilités  $\beta$ , capitalisations, etc.

#### Conseil pratique de gestion

*Il se révèle dans la pratique très intéressant de segmenter la gestion des actions suivant les secteurs industriels. Suivant les anticipations du gérant, il pourra être alors profitable d'allouer par exemple son investissement entre 4 super-secteurs : défensifs ( $\beta < 1$ , Big et Value), cycliques ( $\beta \approx 1$ , Small et Value), financières ( $\beta > 1$  Big et Value), et croissance ( $\beta > 1$ , Small et Growth). Ces segments sectoriels auront alors des réactions différentes au cycle économique.*

#### Stratégies fondées sur les modèles d'évaluation de la prime de risque

En outre, les stratégies actions peuvent se fonder sur l'inefficience des marchés : l'information publique n'est pas totalement intégrée dans l'évaluation de l'action et de sa prime de risque. La logique sous-jacente à ces stratégies a déjà été développée dans la section 1.2.2.

#### Conseil pratique de gestion

*Nous présentons deux exemples de stratégies :*

- *Les stratégies qui profitent de la sous-évaluation des sociétés bien gouvernées et de la sur-évaluation des sociétés mal gouvernées. En effet, l'information sur la gouvernance est souvent mal intégrée dans la prime de risque d'une action : ainsi, les entreprises bien gouvernées devraient avoir une prime de risque plus faible et donc une valorisation de leur action plus forte, car une bonne gouvernance signifie une diminution de l'incertitude concernant la distribution des dividendes, à la base de la valorisation d'une action. Et vice-versa pour une entreprise mal gouvernée.*
- *Les stratégies fondées sur le momentum de prix. En effet, Jegadeesh et Titman [20] ont montré en 1993 la profitabilité d'une stratégie achetant des titres dont la rentabilité les 6 derniers mois était forte et vendant les titres dont la rentabilité était faible. Le momentum de prix ici signifie que les agents n'ont pas totalement intégré l'information disponible et que l'adaptation peut mettre plus de 6 mois. Hong et Stein [19] ont alors tenté de développer un modèle économique expliquant de manière normative la sous-réaction des agents à la diffusion de l'information créant cet effet de momentum de prix.*

### 3.3.2 Stratégies sur d'autres classes d'actifs

Outre les actions, d'autres classes d'actifs peuvent révéler des arbitrages d'évaluation importants.

#### Conseil pratique de gestion

Nous présentons deux exemples de stratégies :

- *Le Bund est un future dont le sous-jacent est constitué des emprunts d'Etat allemand à 10 ans. Il est suivi de très près par les intervenants financiers car il donne la direction des marchés de taux de la zone Euro. Nous pouvons néanmoins réussir à prévoir sa rentabilité à l'aide de variables macro-financières classiques : indice actions, pente de taux, spread corporate (proxy de l'aversion au risque), momentum du prix du pétrole, etc.*
- *Les arbitrages de taux entre pays, appelés carry trade, se sont développés à partir de la non-efficacité des marchés de change et la non-vérification de la parité non couverte des taux d'intérêt, cette dernière stipulant que la différence entre l'anticipation du taux de change et le taux de change au comptant est égale à la différence entre le taux d'intérêt domestique et le taux d'intérêt du pays étranger. La non-efficacité des marchés de change est d'autant plus affirmée sur les marchés émergents. Ainsi, la stratégie consistera à investir sur les devises qui présentent des taux d'intérêt élevés et à emprunter avec des devises de taux d'intérêt faibles.*

### 3.3.3 Hedge funds

L'ensemble de ces stratégies quantitatives va être très performant. Mais ces stratégies se fondent souvent la possibilité de vente à découvert. Ceci sous-entend donc une réglementation plus flexible des marchés financiers. Elles sont donc principalement utilisées par des acteurs plus libres pouvant s'installer fiscalement dans des pays à réglementation plus laxiste : ces acteurs sont les hedge funds.

#### Définition

Les hedge funds sont depuis quelques années sous les feux des projecteurs à cause de leur croissance très importante à la fin des années 90 (cf. Figure 3.1). Ceci est en particulier dû à la décision de nombreux investisseurs institutionnels de se diversifier après le choc boursier de mars 2000 et des rendements obligataires faibles. Le plus important fonds de pension CalPERS a ainsi en septembre 1999 investi 11 milliards de dollars dans les investissements alternatifs, c'est-à-dire les hedge funds<sup>2</sup>.

Mais alors comment définir ces investissements *différents* ? Pour cela, il faut s'intéresser au premier hedge fund créé par Alfred Winslow Jones en 1949. En fait le terme *hedge fund* est cité pour la première fois en 1956 pour décrire le fait que le fonds d'investissement de Jones est à la fois *leveraged* et *hedged*. En effet, l'objectif de Jones, et de nombreux hedge funds aujourd'hui encore, est de développer des stratégies assurant un fort rendement tout en ayant une faible exposition aux fluctuations des marchés sur lesquels il investit. Dans ce but, il combine deux techniques fortement spéculatives :

1. Il réalise un stock picking judicieux qui consiste à acheter de *bonnes* actions et vendre de *mauvaises* actions, lui permettant de s'immuniser de la baisse des marchés puisque les *mauvaises* actions qui sont vendues baissent plus fortement que les *bonnes*. Cette stratégie permet donc de diminuer le risque de marché pris par l'investisseur, qui se couvre alors contre les évolutions défavorables du marché. Toute la difficulté est de déterminer les *bonnes* actions des *mauvaises*.
2. Il achète ensuite, pour augmenter son rendement, les *bonnes* actions à crédit pour ne pas dépenser trop. Ce mécanisme correspond au levier de l'investissement.

Ainsi, en combinant la couverture et le levier, Jones arrive à obtenir entre 1949 et 1966 un rendement annuel de 17.3%, tout en prélevant 20% de commissions sur la performance du fonds, ce qui est exceptionnel.

2. Le terme *alternatif* définit des investissements s'opposant aux investissements *traditionnels* des mutual funds.

Revenons sur le levier issu de l'emprunt. Soit un investissement en  $t$  égal à  $I_t$ . La rentabilité de cet investissement à l'horizon  $h$  est égale à :

$$r_{t|t+h} = \frac{I_{t+h}}{I_t} - 1$$

Si l'investissement  $I_t$  est complété par un capital  $D_t$  emprunté au taux  $r_{t|t+h}^0$ , la rentabilité est composée d'un effet de levier :

$$\begin{aligned} r_{t|t+h}^l &= \frac{(I_t + D_t)(1 + r_{t|t+h}) - (I_t + D_t) - D_t r_{t|t+h}^0}{I_t} \\ &= r_{t|t+h} + \frac{D_t}{I_t} (r_{t|t+h} - r_{t|t+h}^0) \\ &= r_{t|t+h} + \frac{D_t}{I_t} \tilde{r}_{t|t+h} \end{aligned}$$

Le facteur  $\frac{D_t}{I_t}$  est le levier de l'investissement. Le levier est intéressant si la rentabilité de l'investissement sans levier est supérieure au coût de l'emprunt.

La performance de Jones attire bien évidemment des investisseurs comme Warren Buffet et George Soros pour les plus connus aujourd'hui. Mais un problème va survenir dans les années 60. Alors que le *trend* du marché américain est haussier, les nouveaux gérants alternatifs vont être tentés de ne plus se couvrir, en vendant à découvert, puisque cette technique leur fait perdre de l'argent, les actions vendues étant aussi profitables. Au lieu d'être *long/short*, ils deviennent pour beaucoup *long*. Mais lorsqu'en décembre 1968, les marchés se retournent, la plupart des hedge funds, non couverts, font faillite. La Securities and Exchange Commission (SEC) note alors une diminution des hedge funds, passant de 215 à seulement 30 en 1971. Les hedge funds retournent dans l'anonymat médiatique.

Les années 80, via la maturation des nouvelles techniques financières, vont voir un nouvel essor des hedge funds qui vont augmenter pour atteindre 250 en 1989, puis 2700 en 1996. Leur performance exceptionnelle crée leur succès (cf. Figure 3.1). Mais les années 90 vont voir aussi la faillite retentissante de certains fonds : la plus célèbre est celle de Long-Term Capital Management (LTCM), causée par la crise asiatique et la dévaluation du rouble consécutive. En effet, LTCM est à ce moment-là long d'obligations à hauts rendements (*junk bonds*), qui deviennent illiquides en 1998 à cause de la demande importante des investisseurs pour des obligations de bonne qualité (*fly to quality*).

Cette faillite, puis aussi celle en 2005 du fonds Amaranth, n'ont néanmoins pas permis l'essor d'une réglementation sur ces sociétés de gestion particulières. En effet, outre les utilisations de techniques spéculatives risquées, les hedge funds se caractérisent par une réglementation très souple voire inexistante, ainsi qu'une possibilité très limitée pour leur client de retirer le capital investi dans ces fonds. Peut-être faudrait-il se résoudre à réglementer ces véhicules d'investissement. La crise financière de 2007-2008 voit l'essor d'une volonté politique allant dans ce sens. Il est difficile pourtant de responsabiliser les hedge funds comme étant à l'origine de cette crise. Néanmoins, leurs activités spéculatives ont accompagné et certainement permis la frénésie de ces dernières années qui a abouti à l'implosion de 2008 : hausse du prix des matières premières, hausse du prix du pétrole, titrisation démesurée d'emprunts subprimes, fraude Madoff, etc.

Mais les caractéristiques très particulières des hedge funds rendent aujourd'hui difficile l'application d'une réglementation et la mise en place de mesures de risque adéquates.

Pour mieux comprendre ces caractéristiques, nous allons expliciter les différentes stratégies que les hedge funds peuvent mettre en place, développées depuis la stratégie *long/short* de Jones.

## Stratégies

Les hedge funds sont caractérisés par des techniques complexes de levier et de couverture, ainsi qu'une transparence limitée dans la gestion de leurs capitaux et des marges commerciales très importantes ponc-

tionnées sur la performance des investissements. Mais il est aussi possible de segmenter les hedge funds en quatre grandes familles de stratégies :

1. Les stratégies d'arbitrage (*relative value arbitrage*) tentent de tirer profit de l'inefficience des marchés financiers à l'aide de méthodes souvent statistiques. Elles font l'hypothèse que l'inefficience va se résorber avec le temps et donc vont faire un profit significatif en achetant les valeurs sous-évaluées et en vendant celles sur-évaluées. Ces stratégies se développent sur n'importe quel instrument financier.
2. Les stratégies événementielles (*event driven*) utilisent des événements sur les sociétés à l'origine d'anomalies que la stratégie essaie d'exploiter pour créer de la performance. Ainsi lors de fusion-acquisitions, les prix des actions des sociétés ne sont pas forcément à leur juste valeur et la stratégie tente de tirer profit de cette anomalie. De même, il est possible de faire des profits en prêtant et investissant dans des sociétés *en détresse* qui sont généralement sous-évaluées. Ces stratégies peuvent s'accompagner aussi d'une prise de position non négligeable des hedge funds dans les décisions de gouvernance d'entreprise : nous parlons alors de hedge funds activistes.
3. Les stratégies directionnelles (*tactical trading*) prennent des positions sur les tendances des marchés. Elles se composent principalement des stratégies :
  - *Global macro*, qui s'appuient sur les fondamentaux économiques des marchés pour prendre des positions directionnelles,
  - *Long/short equity hedge*, comme celle de Jones, qui peuvent aussi utiliser des produits dérivés pour se couvrir et profiter du levier.
4. Les stratégies hybrides regroupent des hedge funds appliquant plusieurs stratégies différentes ainsi que les fonds de hedge funds qui se sont fortement développés ces dernières années. Ces fonds de hedge funds réalisent des enquêtes sur les politiques d'investissement des fonds dans lesquels ils souhaitent investir. Ces enquêtes, portant le nom de *due diligence*, que l'on peut traduire par *vérification préalable*, ont accru les besoins en modélisation de la performance des hedge funds.

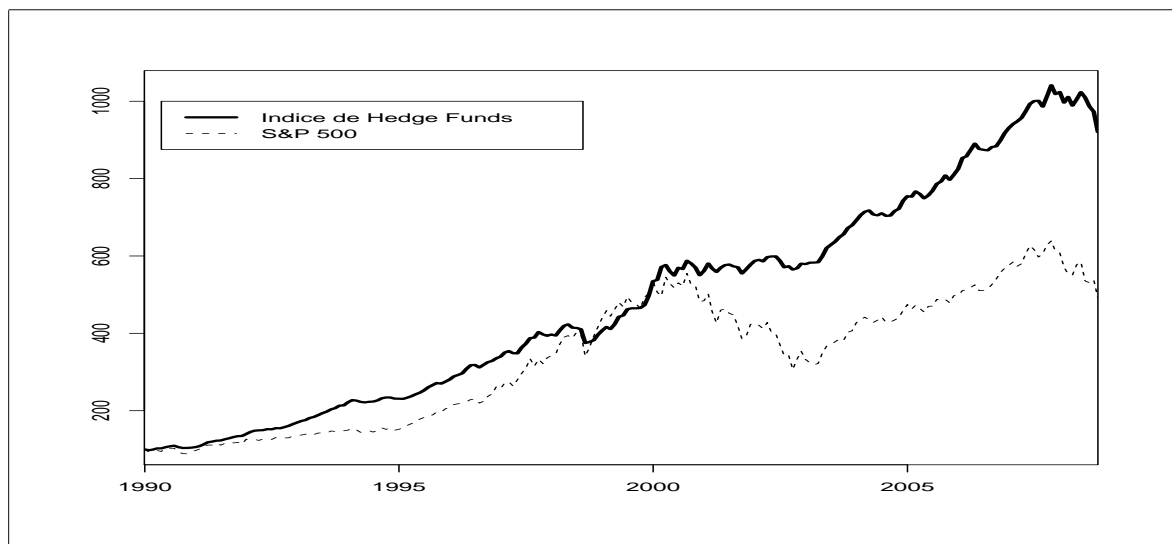


FIGURE 3.1 – Comparaison des évolutions d'un indice de hedge funds et d'un indice action (dividendes nets réinvestis)

Ces stratégies relativement performantes en termes de ratio de Sharpe attirent de nombreux investisseurs. Certains tentent même de répliquer la performance réalisée par les hedge funds en utilisant des produits plus liquides. Ces techniques de réplcation peuvent permettre aux investisseurs d'obtenir des performances similaires sans les contraintes de lock-up (capital récupérable à certaines périodes seulement), mais aussi à un régulateur de calculer des mesures de risque adéquates.

**Conseil pratique de gestion**

*Les hedge funds sont de plus en plus intégrés dans des process de multigestion proposant indirectement à des investisseurs de placer leur épargne dans des hedge funds. Cette stratégie permet une diversification souvent bienfaitrice pour un fonds d'actifs financiers traditionnels.*

# CONCLUSION

Ce cours de Gestion Quantitative de Portefeuille a essayé de proposer, sans prétention, un état de l'art concernant l'allocation des actifs et ses outils quantitatifs d'aide à la décision. Nous avons pu ainsi tenter de comprendre les enjeux de la finance contemporaine et la nécessité de plus en plus grande de bien gérer l'épargne collective mondiale. Puis nous avons continué par décrire les premiers outils quantitatifs mesurant les risques de variation des actifs et les performances des investissements. Enfin, nous avons pu entrer plus précisément dans la boîte noire de l'allocation optimale et des stratégies d'investissement, couvrant autant les problématiques d'immunisation contre le risque que les stratégies quantitatives, très utiles pour booster la performance d'un fonds.

Nous espérons qu'après ce cours et ses ateliers, des compétences en gestion de portefeuille auront pu être développées, pour créer efficacement un portefeuille performant tout en ne prenant pas des risques démesurés.

# BIBLIOGRAPHIE

- [1] AFTALION, F., PONCET, P. & PORTAIT, R., 1998, *La Théorie Moderne du Portefeuille*, Que sais-je ?, PUF.
- [2] AGLIETTA, M. & REBERIOUX, A., 2004, *Dérives du Capitalisme Financier*, Albin Michel.
- [3] BECK, U., 1986, *La société du Risque : Sur la Voie d'une Autre Modernité*, Flammarion, Paris.
- [4] BERLE, A. & MEANS, G., 1932, *The Modern Corporation and Private Property*, Harcourt, Brace and World, New York.
- [5] BERNSTEIN, P., 1995, *Des Idées Capitales*, PUF, Quadrige.
- [6] BERTRAND, P. & PRIGENT, J.L., 2006, *Gestion de Portefeuille*, Economica.
- [7] BRIGO, D. & MERCURIO, F., 2001, *Interest Rate Models - Theory and Practice*, Springer Finance, Berlin.
- [8] CARHART, M., 1997, *On Persistence in Mutual Fund Performance*, Journal of Finance, 52, 57-82.
- [9] CLAUSS, P., 2011, *Gestion de Portefeuille*, Dunod.
- [10] DANA, R. & JEANBLANC-PICQUE, M., 1998, *Marchés Financiers en Temps Continu - Valorisation et Equilibre*, Economica.
- [11] EFRON, B., 1995, *Le Bootstrap et ses Applications*, CISIA.
- [12] FABOZZI, F., FOCARDI, S. & KOLM, P., 2006, *Financial Modelling of the Equity Market*, Wiley Finance.
- [13] FAMA, E.F., 1998, *Market Efficiency, Long-Term Returns, and Behavioral Finance*, Journal of Financial Economics, 49, 283-306.
- [14] FAMA, E. & FRENCH, K., 1993, *Common Risk Factors in the Returns on Stocks and Bonds*, Journal of Financial Economics, 33, 3-56.
- [15] GIDDENS, A., 1991, *Les Conséquences de la Modernité*, L'Harmattan.
- [16] GURLEY, J.G. & SHAW, E.S., 1960, *Money in a Theory of Finance*, The Brookings Institution, Washington.
- [17] GRANGER, C.W.G. & NEWBOLD, P., 1974, *Spurious Regressions in Econometrics*, Journal of Econometrics, 26, 1045-1066.
- [18] HICKS, J., 1975, *Crisis in Keynesian Economics*, Basil Blackwell.
- [19] HONG, H. & STEIN, J.C., 1999, *A Unified Theory of Underreaction, Momentum Trading and Overreaction in Asset Markets*, Journal of Finance, 54, 2143-2184.
- [20] JEGADEESH, N. & TITMAN, S., 1993, *Returns to Buying Winners and Selling Losers : Implications for Stock Market Efficiency*, Journal of Finance, 48, 65-91.
- [21] JOLLIFFE, I.T., 1986, *Principal Component Analysis*, Springer.
- [22] LAMBERTON, D. & LAPEYRE, B., 1991, *Introduction au Calcul Stochastique Appliqué à la Finance*, Mathématiques et Applications, Ellipses.

- [23] LARDIC, S. & MIGNON, V., 2002, *Econométrie des Séries Temporelles Macroéconomiques et Financières*, Economica.
- [24] LINTNER, J., 1965, *The Valuation of Risk Assets and the Selection of Risky Investments in Stock Portfolios and Capital Budgets*, Review of Economics and Statistics, 47, 13-37.
- [25] MARDIA, K.V., KENT, J.T. & BIBBY, J.M., 2003, *Multivariate Analysis*, Academic Press, London.
- [26] MARKOWITZ, H., 1952, *Portfolio Selection*, Journal of Finance, 7, 77-99.
- [27] MERTON, R.C., 1972, *An Analytic Derivation of the Efficient Portfolio Frontier*, Journal of Financial and Quantitative Analysis, 7, 1851-1872.
- [28] MOSSIN, J., 1966, *Equilibrium in a Capital Asset Market*, Econometrica, 34, 768-783.
- [29] MUSIELA, M. & RUTKOWSKI, M., 1997, *Martingale Methods in Financial Modelling*, Applications of Mathematics, Springer.
- [30] PERETTI-WATEL, P., 2000, *Sociologie du Risque*, HER/Armand Colin, Paris.
- [31] PEROLD, A.F. & SHARPE, W.F., 1988, *Dynamic Strategies for Asset Allocation*, Financial Analysts Journal, 16-27.
- [32] ROSS, S., 1976, *The Arbitrage Theory of Capital Asset Pricing*, The Journal of Economic Theory, 13.
- [33] SHARPE, W., 1964, *Capital Asset Prices : a Theory of Market Equilibrium under Conditions of Risk*, Journal of Finance, 19, 425-442.
- [34] VIVIANI, J.L., 2001, *Gestion de Portefeuille*, Dunod.