

STRATÉGIES QUANTITATIVES

Pierre Clauss

Ensaï
Filière Gestion des Risques et Ingénierie Financière

OBJECTIF DE L'ENSEIGNEMENT

Ce cours de 3 séances de 5h donnera lieu à une première partie de cours magistral exposant les enjeux des stratégies quantitatives ainsi que les techniques statistiques et économétriques afférentes.

La seconde et majeure partie du cours sera dédiée à des ateliers sur 4 projets distincts. Le travail s'effectuera sur des données réelles et à l'aide de logiciels informatiques dont le choix est à la discrétion des étudiants. L'objectif est pour les étudiants, à l'issue de ce cours, d'acquérir des compétences poussées pour pouvoir construire et implémenter des stratégies quantitatives innovantes.

Ce cours aboutira à une soutenance orale pour chacun des 4 projets.

TABLE DES MATIÈRES

INTRODUCTION	4
1 ALLOCATION QUANTITATIVE	7
1.1 Allocation stratégique de Markowitz	7
1.1.1 Absence d'un actif sans risque	7
1.1.2 Présence d'un actif sans risque	9
1.1.3 Frontière efficiente avec un paramètre d'aversion au risque	11
1.1.4 Limites de l'optimisation de Markowitz	12
1.2 Allocation tactique de Black-Litterman	13
1.2.1 Principe général	13
1.2.2 Mise en place pratique	14
2 ASSURANCE DE PORTEFEUILLE	16
2.1 Stratégie stop-loss	16
2.2 Stratégie optionnelle	18
2.3 Stratégie du coussin	20
3 MOTEURS DE PERFORMANCE	21
3.1 Techniques de régression linéaire	21
3.1.1 Préliminaires essentiels à la mise en place d'un modèle de régression	21
3.1.2 Filtre de Kalman	23
3.2 Momentum de taux	26
3.2.1 Analyse en Composantes Principales	26
3.2.2 Bootstrap et ACP	27
3.2.3 Stratégie momentum de taux	28
CONCLUSION	29
BIBLIOGRAPHIE	29

INTRODUCTION

Covered-call, carry trade, 130/30, CDO, CDO², CDO³, etc. L'imagination des *quants* et autres ingénieurs financiers a fait exploser le nombre des stratégies d'investissement quantitatives développées ces dernières années, pour certaines faisant le bonheur des banques et des fonds spéculatifs, mais aussi pour d'autres étant à l'origine de certains produits abscons, ayant été à l'origine de la crise financière de 2007-2008.

Dans ce cours, nous allons présenter les fondamentaux des stratégies quantitatives pour en comprendre les objectifs et les principales techniques de mise en oeuvre. Nous avons décidé de nous intéresser à trois thèmes qui nous semblent essentiels sur ce sujet et qui balayent un grand nombre de stratégies quantitatives :

1. l'intégration de signaux (quantitatifs ou non) dans la décision d'allocation d'un portefeuille diversifié,
2. la garantie du capital d'un portefeuille actions,
3. et la mise en place de moteurs de performance profitant d'anomalies sur les marchés financiers.

Pour chacun de ces thèmes, nous faisons appel à des techniques statistiques et économétriques plus ou moins récentes : l'estimation bayésienne, la statistique des extrêmes, l'analyse en composantes principales, la modélisation auto-régressive, le filtre de Kalman, pour les principales. Les produits dérivés sont aussi largement utilisés. Enfin, une connaissance pointue des enjeux financiers est évidemment requise pour que les stratégies développées soient fondées sur des présupposés cohérents et intelligibles.

Une stratégie d'investissement quantitative tente de répondre à des **objectifs de gestion** pré-définis en faisant appel à des **techniques** quantitatives, statistiques et économétriques, plus ou moins complexes dans le but de déterminer des allocations de portefeuilles optimales.

Un premier exemple pour comprendre les enjeux d'une stratégie quantitative est celui, simple, de la différence entre une stratégie dynamique naïve, laissant son allocation flotter au gré de l'évolution des prix des actifs la composant, et une stratégie d'allocation fixe à tout moment :

1. la première est une stratégie *buy-and-hold*,
2. et la seconde une stratégie *constant mix*.

Nous nous inspirons de la typologie de Perold et Sharpe développée en 1988 [14] pour présenter ces deux stratégies.

Stratégie buy-and-hold

Les stratégies buy-and-hold sont des stratégies qui achètent les actifs et laissent leur poids flotter suivant l'évolution de leur valeur. Il n'y a donc pas de rebalancement des poids des actifs dans le portefeuille. Lorsque la valeur de l'actif s'élève, toutes choses égales par ailleurs, sa proportion dans le portefeuille va s'élever aussi. Formellement, notons la valeur du portefeuille P_t pour $t \geq 1$ et A_t la valeur des n actifs le composant en t . Nous avons ainsi :

$$P_{t+1} = P_t \sum_{i=1}^n \omega_t^i \frac{A_{t+1}^i}{A_t^i}$$

ω_t^i représente le poids alloué à l'actif i en t . Dans une stratégie buy-and-hold, les poids évoluent suivant la valeur relative des actifs, et ont pour expression, pour $t \geq 2$ (les premiers poids sont déterminés au départ

de la stratégie) :

$$\omega_t^i = \omega_{t-1}^i \frac{P_{t-1}}{P_t} \frac{A_t^i}{A_{t-1}^i}$$

Supposons que nous ayons deux actifs, une action et un instrument monétaire sans risque. La valeur du portefeuille de stratégie buy-and-hold a les caractéristiques suivantes :

- elle est linéaire par rapport à la valeur de l'action,
- elle ne diminuera jamais en-dessous de la valeur initiale investie dans l'instrument monétaire,
- elle a un *upside* potentiel illimité, c'est-à-dire un potentiel de gain illimité.

Stratégie constant mix

Les stratégies constant mix maintiennent une exposition constante des actifs relativement à la valeur du portefeuille. Les poids n'évoluent donc pas suivant la valeur relative des actifs mais restent fixes. Ainsi, comme les valeurs relatives évoluent, il faut dynamiquement réajuster constamment les proportions investies en valeur dans les actifs pour demeurer à la proportion relative définie au départ.

Lorsque la valeur d'un actif diminue, toutes choses égales par ailleurs, la proportion relative de cet actif va diminuer au sein du portefeuille. Il va donc falloir acheter de cet actif pour conserver le même poids au sein du portefeuille. Les poids restent ainsi constants. Pour éviter d'acheter ou de vendre des actifs trop régulièrement et diminuer ainsi les coûts de transaction de la stratégie, il est possible de déterminer des seuils de perte (de gain) en-deçà (au-delà) de laquelle (duquel) on commence à revenir aux poids initiaux. Au-dessus (en-dessous), nous laissons filer les poids comme dans la stratégie buy-and-hold.

Supposons à nouveau un portefeuille composé d'une action et d'un taux sans risque. La stratégie constant-mix va acheter l'action après que celle-ci a diminué et va la vendre après que celle-ci a augmenté. Cette stratégie s'avère alors profitable lorsque des retournements de marché sont fréquents et qu'une augmentation (baisse) de l'action est suivie immédiatement d'une baisse (augmentation). Autrement dit, l'anticipation du gérant est un marché actions fortement volatil et flat.

Perold et Sharpe illustre cette caractéristique à l'aide de l'exemple numérique suivant. Supposons que l'action passe dans un premier temps de 100 à 90, puis dans un second temps revienne à 100, et que le monétaire est supposé constant, pour simplifier les calculs. Dans le cas d'une stratégie buy-and-hold, les poids relatifs au portefeuille ont évolué mais pas la richesse. Dans le cas d'une stratégie constant mix c'est différent (cf. tableau 1).

Supposons que nous ayons investi 60% dans l'action et 40% dans l'instrument monétaire. Lors de la baisse de l'action de 100 à 90, la valeur de l'action dans le portefeuille passe de 60 à 54. Son poids diminue donc à $54/94 = 57.4\%$. C'est le poids de l'action dans la stratégie buy-and-hold. Or dans la stratégie constant mix, nous souhaitons acheter de l'action pour revenir au poids initial de 60%. La valeur correspondante de l'action dans le portefeuille va alors être égale à $60\% * 94 = 56.40$. Nous vendons de manière symétrique $56.40 - 54 = 2.40$ de monétaire : le portefeuille en contient alors 37.60.

La hausse de l'action qui va suivre dans le second temps va se révéler profitable à la stratégie constant mix qui vient d'acheter de l'action. En effet, la valeur de l'action dans le portefeuille va passer de 56.40 à $56.40 * 100/90 = 62.67$. La valeur du portefeuille est alors égale à $37.60 + 62.67 = 100.27$. Contrairement à la stratégie buy-and-hold, qui finit à 100, la stratégie constant mix a fait gagner 0.27. Le positionnement du gérant, *contrarian* aux évolutions du marché, s'est révélé payant, car l'achat d'action a été suivi immédiatement par une augmentation de sa valeur.

Ensuite, il est nécessaire de rebalancer à nouveau les poids, puisque les 62.67 de l'action dans le portefeuille représentent $62.67/100.27 = 62.50\%$ de la richesse du portefeuille, ce qui est supérieur aux 60% fixés. Il va alors falloir vendre de l'action pour $62.67 - 60\% * 100.27 = 2.51$. Nous avons à la fin de la seconde période un portefeuille composé de 60.16 d'actions et $37.60 + 2.51 = 40.11$ de monétaire. Dans le cas où l'action va baisser au cours de la période suivante, ce rebalancement va s'avérer à nouveau profitable.

	t=0	t=1		t=2	
Évolution Action	100	90		100	
		<i>Buy-and-hold</i>	<i>Constant mix</i>	<i>Buy-and-hold</i>	<i>Constant mix</i>
Valeur action	60	54	56.40	60	60.16
Poids action	60%	57.4%	60%	60%	60%
Valeur monétaire	40	40	37.60	40	40.11
Valeur portefeuille	100	94	94	100	100.27

TABLE 1 – Comparaison des stratégies constant mix et buy-and-hold

Un investisseur constant mix anticipe donc des retournements réguliers des actifs composant son portefeuille. Et lorsque le marché est flat et volatil, cette stratégie profitera fortement des retournements de marché.

Au contraire, lorsque le marché a des tendances (*trends*) de hausse (*bull*) et de baisse (*bear*) marquées, la stratégie buy-and-hold sera plus adéquate.

Voici donc un premier exemple présentant l'intérêt essentiel des stratégies d'investissement quantitatives, tant au niveau de l'objectif de gestion (anticipant soit un marché de tendances, soit un marché volatil) qu'au niveau de la technique quantitative implémentée (poids flottants ou fixes).

CHAPITRE 1

ALLOCATION QUANTITATIVE

Le premier thème abordé dans ce cours est celui de l'intégration de vues économiques et financières dans l'évolution de l'allocation d'un portefeuille. L'objectif de gestion est de faire évoluer l'allocation stratégique (horizon moyen-terme) en fonction des changements de marchés pour déterminer une allocation tactique (horizon plus court) ; la technique quantitative est une technique bayésienne d'estimation des nouvelles allocations.

Mais avant de présenter l'outil d'allocation tactique proposé par Black et Litterman en 1990 [1], nous allons revenir sur les résultats de Markowitz [12] et les différents portefeuilles stratégiques qu'il a déterminés dans le cadre moyenne-variance.

Précisons que l'objet de ce premier thème est de présenter les techniques d'allocation et non les méthodes d'obtention des vues permettant de faire évoluer ces allocations (prévisions économétriques : régression linéaire, séries temporelles, cointégration, etc.).

1.1 Allocation stratégique de Markowitz

Dans la multiplicité de choix proposés à l'investisseur en termes de rentabilité et variance de portefeuille, Markowitz introduit la notion de portefeuille *efficient*. "Qui ne risque rien n'a rien" : pour obtenir une espérance de rentabilité plus élevée, il faut accepter un risque plus important. Le risque est l'effort nécessaire à l'obtention d'une rentabilité. Un portefeuille *efficient* est celui qui offre la rentabilité attendue la plus forte pour un niveau de risque donné, ou qui a le risque le plus faible pour une rentabilité attendue donnée. L'ensemble des portefeuilles efficients de l'univers d'actifs considéré forme la *Frontière Efficiente*.

Nous allons distinguer deux cas pour déterminer la frontière efficiente suivant la présence ou non d'un actif sans risque. Nous nous inspirons de l'article de Merton [13] de 1972 pour les démonstrations qui vont suivre.

1.1.1 Absence d'un actif sans risque

Frontière efficiente

La détermination des poids optimaux se fait suivant la minimisation de la variance du portefeuille sous la contrainte d'une rentabilité objectif μ_p et d'une somme des poids égale à 1. Formellement, nous avons :

$$\min_{\omega} \omega' \Sigma \omega$$

sous les contraintes :

$$\begin{aligned} \omega' \mu &= \mu_p \\ \omega' e &= 1 \end{aligned}$$

avec ω le vecteur de poids des actifs composant le portefeuille, μ le vecteur des rentabilités des actifs, Σ la matrice de variance-covariance des rentabilités des actifs, symétrique et définie positive¹, et $e = [1 \ 1 \ \dots \ 1]'$.

Résoudre ce problème de minimisation nous permet de définir l'équation de la frontière efficiente définie par Markowitz. Nous déterminons pour cela le lagrangien :

$$\mathcal{L} = \omega' \Sigma \omega + \lambda_1 (\mu_p - \omega' \mu) + \lambda_2 (1 - \omega' e)$$

avec λ_1 et λ_2 les multiplicateurs de Lagrange. La condition d'optimalité du premier ordre s'écrit :

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \omega} = 2\Sigma\omega - \lambda_1\mu - \lambda_2e = 0 \Leftrightarrow \omega = \frac{\lambda_1}{2}\Sigma^{-1}\mu + \frac{\lambda_2}{2}\Sigma^{-1}e \quad (1.1)$$

En combinant avec les 2 contraintes, nous avons :

$$\begin{cases} \omega' \mu = \mu_p \\ \omega' e = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \mu' \omega = \mu_p \\ e' \omega = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda_1 \mu' \Sigma^{-1} \mu + \lambda_2 \mu' \Sigma^{-1} e = 2\mu_p \\ \lambda_1 e' \Sigma^{-1} \mu + \lambda_2 e' \Sigma^{-1} e = 2 \end{cases}$$

Nous posons les constantes suivantes :

$$A = e' \Sigma^{-1} \mu = \mu' \Sigma^{-1} e, \quad B = \mu' \Sigma^{-1} \mu, \quad \text{et } C = e' \Sigma^{-1} e.$$

Le système à résoudre en λ_1 et λ_2 devient :

$$\begin{cases} \lambda_1 B + \lambda_2 A = 2\mu_p \\ \lambda_1 A + \lambda_2 C = 2 \end{cases}$$

Nous obtenons finalement les expressions des multiplicateurs de Lagrange suivants :

$$\begin{aligned} BC\lambda_1 - A^2\lambda_2 &= 2C\mu_p - 2A \Leftrightarrow \lambda_1 = 2 \frac{C\mu_p - A}{D} \\ A^2\lambda_2 - BC\lambda_2 &= 2A\mu_p - 2B \Leftrightarrow \lambda_2 = 2 \frac{B - A\mu_p}{D} \end{aligned}$$

avec $D = BC - A^2$. Enfin, en substituant les expressions des multiplicateurs dans l'équation (1.1), nous obtenons les poids du portefeuille de variance minimum ω_p suivants :

$$\omega_p = g + h\mu_p$$

$$\text{avec } g = \frac{1}{D} [B(\Sigma^{-1}e) - A(\Sigma^{-1}\mu)] \text{ et } h = \frac{1}{D} [C(\Sigma^{-1}\mu) - A(\Sigma^{-1}e)].$$

Il est commode de représenter la frontière efficiente, c'est-à-dire l'ensemble des portefeuilles efficients, dans le plan (μ_p, σ_p) avec (cf. Figure 1.1²) :

$$\begin{aligned} \sigma_p &= \sqrt{\omega_p' \Sigma \omega_p} = \sqrt{\left(\frac{\lambda_1}{2} \mu' \Sigma^{-1} + \frac{\lambda_2}{2} e' \Sigma^{-1} \right) \Sigma \omega_p} \\ &= \sqrt{\frac{\lambda_1}{2} \mu' \omega_p + \frac{\lambda_2}{2} e' \omega_p} = \sqrt{\frac{\lambda_1}{2} \mu_p + \frac{\lambda_2}{2}} \\ &= \sqrt{\frac{1}{D} (C\mu_p^2 - 2A\mu_p + B)} \end{aligned}$$

La partie de la frontière efficiente située en-dessous du point où l'écart-type est minimum (correspondant, nous le verrons dans le paragraphe suivant, au portefeuille GMV) n'est bien entendu pas optimale puisqu'il est possible d'obtenir, pour un même risque, une rentabilité plus élevée.

1. Σ est définie positive signifie que $\forall x \in \mathbb{R}^n, x' \Sigma x \geq 0$ et $x' \Sigma x = 0 \Rightarrow x = 0$. Comme elle est en outre symétrique, nous pouvons réduire cette définition au fait que toutes ses valeurs propres doivent être strictement positives.

2. Les frontières efficientes de la Figure 1.1 sont déterminées à l'aide d'un cas particulier issu de l'optimisation d'un portefeuille composé de 3 indices actions.

Portefeuille global de variance minimum

Outre cette équation définissant l'ensemble des portefeuilles efficients, nous pouvons déterminer le portefeuille ayant la variance la plus faible. Nous l'appelons le portefeuille global de variance minimum (Global Minimum Variance ou GMV). Il se calcule à partir du programme d'optimisation suivant :

$$\min_{\omega} \omega' \Sigma \omega$$

sous la seule contrainte :

$$\omega' e = 1$$

Le lagrangien s'écrit alors :

$$\mathcal{L} = \omega' \Sigma \omega + \lambda(1 - \omega' e)$$

La première condition d'optimalité nous donne la relation suivante :

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \omega} = 2\Sigma\omega - \lambda e = 0 \Leftrightarrow \omega = \frac{\lambda}{2} \Sigma^{-1} e \quad (1.2)$$

En la combinant avec la contrainte, nous obtenons :

$$\frac{\lambda}{2} e' \Sigma^{-1} e = 1 \Leftrightarrow \lambda = \frac{2}{C}$$

Ainsi, nous avons les poids du portefeuille GMV ω_g suivants :

$$\omega_g = \frac{1}{C} \Sigma^{-1} e$$

Nous avons aussi les expressions de la rentabilité moyenne μ_g et de l'écart-type σ_g du portefeuille GMV suivantes :

$$\begin{aligned} \mu_g &= \mu' \omega_g = \frac{A}{C} \\ \sigma_g &= \sqrt{\omega_g' \Sigma \omega_g} = \sqrt{\frac{1}{C}} \end{aligned}$$

1.1.2 Présence d'un actif sans risque

Frontière efficiente

Avec la présence d'un actif sans risque, la contrainte de somme des poids égale à 1 n'est plus nécessaire puisqu'il sera investi $(1 - \omega' e)$ dans l'actif sans risque. Le programme d'optimisation déterminant le portefeuille de variance minimum avec comme rentabilité objectif μ_p est défini de la manière suivante :

$$\min_{\omega} \omega' \Sigma \omega$$

sous la contrainte :

$$\omega' \mu + (1 - \omega' e) r_f = \mu_p$$

avec r_f la rentabilité de l'actif sans risque. Le lagrangien s'écrit :

$$\mathcal{L} = \omega' \Sigma \omega + \lambda(\mu_p - \omega' \mu - (1 - \omega' e) r_f)$$

Nous différencions \mathcal{L} par rapport à ω et annulons cette dérivée à 0 :

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \omega} = 2\Sigma\omega - \lambda(\mu - r_f e) = 0 \Leftrightarrow \omega = \frac{\lambda}{2} \Sigma^{-1} (\mu - r_f e) \quad (1.3)$$

En combinant avec la contrainte, nous avons :

$$\begin{aligned}\mu' \omega + (1 - e' \omega) r_f = \mu_p &\Leftrightarrow \frac{\lambda}{2} \mu' \Sigma^{-1} (\mu - r_f e) - \frac{\lambda}{2} e' \Sigma^{-1} (\mu - r_f e) r_f = \mu_p - r_f \\ &\Leftrightarrow \frac{\lambda}{2} = \frac{\mu_p - r_f}{(\mu - r_f e)' \Sigma^{-1} (\mu - r_f e)}\end{aligned}$$

Ainsi, nous avons d'après l'équation (1.3) les poids du portefeuille de variance minimum ω_p égaux à :

$$\omega_p = \frac{\mu_p - r_f}{(\mu - r_f e)' \Sigma^{-1} (\mu - r_f e)} \Sigma^{-1} (\mu - r_f e) = c_p \Sigma^{-1} (\mu - r_f e)$$

Et si nous définissons les notations suivantes : $\tilde{\mu} = \mu - r_f e$, $\tilde{A} = e' \Sigma^{-1} \tilde{\mu}$, $\tilde{B} = \tilde{\mu}' \Sigma^{-1} \tilde{\mu}$, nous obtenons :

$$\omega_p = \frac{\tilde{\mu}_p}{\tilde{B}} \Sigma^{-1} \tilde{\mu} \quad (1.4)$$

avec $c_p = \frac{\tilde{\mu}_p}{\tilde{B}}$.

L'écart-type de ce portefeuille a pour expression :

$$\sigma_p = \sqrt{\omega_p' \Sigma \omega_p} = \sqrt{\frac{\tilde{\mu}_p^2}{\tilde{B}}} = \sqrt{\frac{1}{\tilde{B}}} |\tilde{\mu}_p|$$

ce qui nous donne l'équation de la frontière efficiente. Nous remarquons que cette dernière est une droite croissante lorsque $\mu_p > r_f$ et décroissante lorsque $\mu_p < r_f$. Ce second cas n'est bien entendu pas optimal puisque pour un même risque, nous pouvons obtenir un rendement plus élevé.

La frontière efficiente (cf. Figure 1.1) se réduit ainsi à la tangente croissante à la frontière efficiente des actifs risqués et ayant pour origine le taux sans risque. Nous appelons cette droite la *Capital Market Line*. Nous pouvons observer que l'introduction de l'actif sans risque améliore sensiblement le ratio de Sharpe des portefeuilles puisque pour un même risque, il est possible d'obtenir un rendement plus élevé.

Portefeuille tangent

Dans l'ensemble des portefeuilles efficients avec la présence d'un actif sans risque, il existe un portefeuille uniquement composé d'actifs risqués. Ce portefeuille est à l'intersection de la frontière efficiente déterminée avec l'absence d'un actif sans risque avec celle déterminée précédemment avec la présence d'un actif sans risque. Étant donné que cette dernière est une droite, le portefeuille composé uniquement d'actifs risqués, appelé portefeuille de marché, est le portefeuille tangent. Nous ajoutons à l'équation (1.4) donc la contrainte de somme des poids égale à 1 pour obtenir l'expression de ses poids.

Ainsi, ses poids ω_q sont tels que :

$$\begin{aligned}\omega_q' e = 1 &\Leftrightarrow e' \omega_q = 1 \\ &\Leftrightarrow c_q e' \Sigma^{-1} \tilde{\mu} = 1 \\ &\Leftrightarrow c_q = \frac{1}{\tilde{A}}\end{aligned}$$

Ainsi,

$$\omega_q = \frac{1}{\tilde{A}} \Sigma^{-1} \tilde{\mu}$$

Et l'espérance de rentabilité en excès du taux sans risque et l'écart-type du portefeuille tangent ont pour expression :

$$\begin{aligned}\tilde{\mu}_q &= \tilde{\mu}' \omega_q = \frac{\tilde{B}}{\tilde{A}} \\ \sigma_q &= \sqrt{\omega_q' \Sigma \omega_q} = \sqrt{\frac{\tilde{B}}{\tilde{A}^2}}\end{aligned}$$

Il est intéressant de préciser pour conclure que ce portefeuille tangent est celui qui a le ratio de Sharpe maximum, parmi les portefeuilles composés uniquement d'actifs risqués, égal à :

$$S_q = \frac{\tilde{\mu}_q}{\sigma_q} = \sqrt{\tilde{B}}$$

En effet, le portefeuille tangent appartient bien à la droite la plus pentue, parmi celles issues de l'origine r_f et coupant la frontière efficiente des actifs risqués.

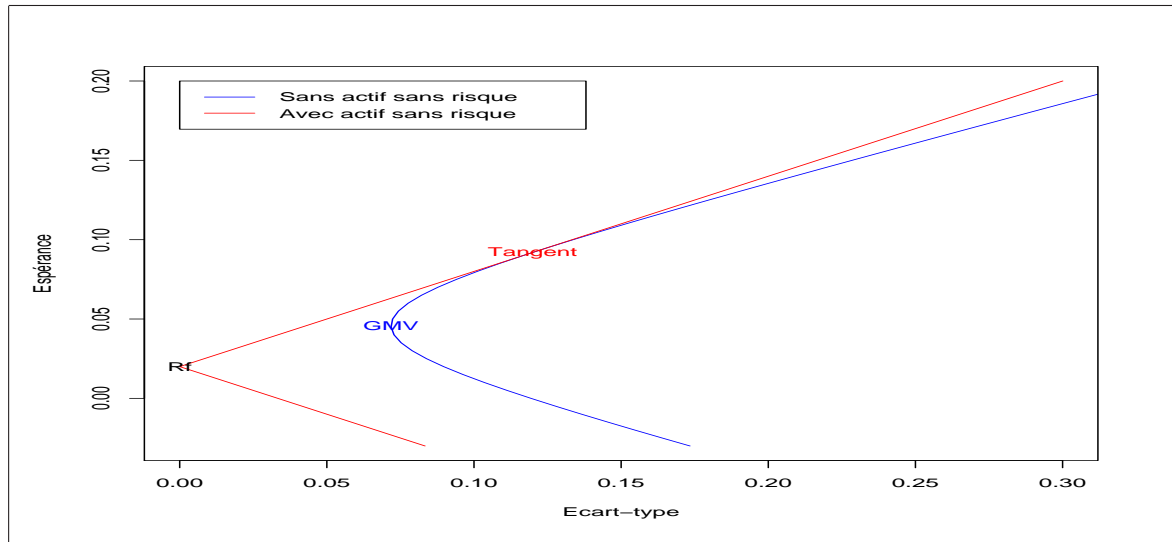


FIGURE 1.1 – Frontières efficientes

1.1.3 Frontière efficiente avec un paramètre d'aversion au risque

Il est possible aussi de construire la frontière efficiente des actifs risqués à l'aide d'une formulation différente mais très utilisée en pratique. Nous allons alors tenter de maximiser l'utilité d'un investisseur rationnel qui sera caractérisé par un paramètre d'aversion au risque $\gamma > 0$ ³.

Le portefeuille ainsi obtenu est le portefeuille *optimal* qui maximise l'espérance de l'utilité de l'investisseur $\mathbb{E}[U(W)]$ avec W sa richesse. Dans le cadre théorique de Markowitz, il est utilisé une fonction d'utilité quadratique. Maximiser cette fonction objectif revient à maximiser, par rapport à ω , la fonction d'optimisation de moyenne-variance :

$$\max_{\omega} \mathbb{E}[U(W)] \Leftrightarrow \max_{\omega} \left(\omega' \tilde{\mu} - \frac{\gamma}{2} \omega' \Sigma \omega \right)$$

Nous remarquons que plus l'individu est averse au risque (γ croît), plus le risque du portefeuille optimal pénalise son espérance de rentabilité : le portefeuille maximisé est donc moins risqué. La maximisation sans contraintes de cette fonction a pour solution les poids optimaux ω^* :

$$\omega^* = \frac{1}{\gamma} \Sigma^{-1} \tilde{\mu}$$

Ces derniers sont déterminés à l'aide de la résolution de l'optimisation d'une fonction quadratique qui annule la dérivée première en ω et a une dérivée seconde négative, ce qui implique sa maximisation.

3. La calibration de cette aversion n'est pas évidente. Elle diffère fortement entre les individus. Nous pouvons néanmoins déterminer un coefficient moyen. Considérons le portefeuille de marché de rentabilité en excès du taux sans risque $R_M - r_f$ et de volatilité σ_M . Alors, nous définissons $\gamma = \frac{R_M - r_f}{\sigma_M^2}$.

Le portefeuille tangent est déterminé pour une aversion au risque : $\gamma = \tilde{A} = e' \Sigma^{-1} \tilde{\mu}$.

Des contraintes peuvent être ajoutées et les poids optimaux sont alors obtenus à l'aide de méthodes de maximisation numériques de l'utilité. Des exemples de contraintes sont l'interdiction de vente à découvert, les poids ne peuvent alors pas être négatifs, ou encore l'impossibilité de recourir à l'effet de levier, c'est-à-dire que l'investissement est auto-financé, alors la somme des poids doit être égale à 100%.

1.1.4 Limites de l'optimisation de Markowitz

Nous allons présenter 4 limites essentielles à l'optimisation de portefeuille suivant Markowitz :

1. La première concerne la modélisation statistique sous-jacente à l'optimisation moyenne-variance : effectivement, réduire les actifs à leur moments d'ordre 1 (moyenne) et 2 (variance) revient à modéliser les actifs du portefeuille optimal par une loi gaussienne. Or certains actifs ne sont pas gaussiens et peuvent avoir des profils de distribution très différents : l'optimisation de Markowitz fournira alors des résultats peu cohérents avec la réalité. Nous pensons aux actions risquées mais aussi aux titres de créances qui devraient être modélisés plus précisément.
2. La deuxième est la dépendance de l'optimisation de Markowitz à l'estimation des rendements moyens. Ces rendements estimés pour une période d'allocation peuvent évoluer à court-terme : or un changement très faible de la moyenne des rendements aura des conséquences démesurément importantes sur l'allocation, ce qui semble ennuyeux dans la pratique. L'optimisation est donc relativement instable.
3. La troisième survient lorsque le nombre d'actifs à profils similaires est très importants. Alors la propriété définie positive de la matrice de variance-covariance peut être mise à mal. Des méthodes d'extraction de facteurs communs (ACP) ou de shrinkage peuvent alors déterminer une matrice de variance-covariance plus facile à utiliser.
4. La dernière limite est opérationnelle : en effet, les optimisations étudiées précédemment donnent des solutions simples mais dans la réalité les contraintes sur les poids sont plus nombreuses et rendent l'optimisation difficile. En effet, régulièrement, un investisseur peut vouloir mettre des limites d'achat ou de vente sur certaines classes d'actifs (on peut penser par exemple aux actions des pays émergents qui sont plus risquées et dont on peut vouloir limiter l'allocation). Les contraintes vont influencer fortement les allocations qui ne seront alors plus si optimales que prévues...

Nous allons présenter dans la suite une méthode d'allocation innovante permettant de dépasser la deuxième limite de dépendance de l'allocation de Markowitz à l'estimation des rendements moyens : nous pourrions alors intégrer de nouvelles espérances de rendement sans rendre l'allocation instable.

1.2 Allocation tactique de Black-Litterman

Il nous faut, tout d'abord, introduire la différence entre allocation tactique et allocation stratégique. La différence entre ces deux types d'allocation est d'ordre temporel. Plus précisément, l'allocation stratégique va être définie pour un horizon de temps relativement long (1 à 3 ans) et l'allocation tactique pour un horizon plus court (1 à 3 mois). Cette dernière sera donc un ajustement de l'allocation stratégique aux conditions conjoncturelles du marché.

L'optimisation de Markowitz étant très sensible aux évolutions, mêmes faibles, des estimations des rendements moyens, Black et Litterman [1] ont proposé une version plus robuste de l'optimisation moyenne-variance.

1.2.1 Principe général

Black et Litterman ont développé en 1990 un modèle d'allocation quantitatif flexible sur lequel nous pouvons affecter des *vues* de sur ou sous-évaluation des actifs. Les poids optimaux qui en ressortent conjuguent alors le portefeuille stratégique original (considéré comme portefeuille d'équilibre) et le portefeuille issu des vues.

L'approche de Black et Litterman, que l'on peut voir comme une approche bayésienne, d'allocation tactique est intéressante à différents niveaux :

1. c'est une approche originale, flexible et scientifiquement robuste d'allocation tactique, qui conjugue portefeuille stratégique et vues tactiques,
2. il est possible de la compléter par des contraintes propres au processus d'allocation tactique.

Les inputs principaux nécessaires à la détermination du portefeuille tactique sont les vues (issues des économistes ou de modèles quantitatifs de prévision) sur les actifs composant le portefeuille stratégique ainsi que l'allocation stratégique du portefeuille. A partir de cette dernière, nous calculons les rentabilités implicites Π correspondantes, en excès du taux sans risque :

$$\Pi = \gamma \Sigma \omega^*$$

avec γ le paramètre d'aversion au risque, Σ la matrice de variance-covariance des actifs, et ω^* les allocations stratégiques du portefeuille.

Les vues que nous obtenons sur les différents actifs vont faire dévier les rentabilités implicites dans le sens approprié. Ceci détermine alors ce que nous appelons les rentabilités mixtes Ψ de Black-Litterman, qui ont pour expression⁴ :

$$\Psi = [(\tau \Sigma)^{-1} + P' \Omega^{-1} P]^{-1} [(\tau \Sigma)^{-1} \Pi + P' \Omega^{-1} P Q] = \frac{A}{A+B} \Pi + \frac{B}{A+B} Q$$

τ est un paramètre de confiance dans les vues : plus τ est faible, plus nous aurons confiance dans le portefeuille stratégique et moins dans les vues. La matrice P détermine la présence d'une vue sur un actif et nous décidons de la définir comme une matrice identité : nous faisons donc l'hypothèse que nous avons pour chaque actif une vue, et que cette dernière peut-être neutre. Ω contient les incertitudes attachées aux notes (homogène à la variance de l'actif) et Q les rentabilités espérées des vues. Les rentabilités mixtes résultent ainsi d'une moyenne pondérée entre les rentabilités d'équilibre Π et celles associées aux vues Q . C'est à partir de ces espérances de rentabilités que nous déterminons un portefeuille optimisé, sous différentes contraintes. Le fait de pondérer le portefeuille stratégique et le portefeuille issu des vues permet de rendre plus robustes les allocations déterminées, que nous contrôlons alors plus précisément, relativement à l'instabilité de l'optimisation de Markowitz.

Les poids ω^{**} tactiques se déduisent de l'optimisation de la fonction d'utilité quadratique U dont nous rappelons l'expression :

$$U(W) = \omega' \hat{\Psi} - \frac{\gamma}{2} \omega' \hat{\Sigma} \omega$$

4. Nous ne donnons pas ici la démonstration de ce calcul qui peut être déterminé à partir d'une application des Moindres Carrés Généralisés (cf. [4]) ou encore d'une estimation de type bayésien.

1.2.2 Mise en place pratique

Paramètre d'aversion au risque

Nous pouvons calibrer le paramètre d'aversion au risque γ à partir de la formulation suivante :

$$\gamma = \frac{\omega^* \tilde{\mu}}{\omega^{*\prime} \Sigma \omega^*}$$

Paramètre de confiance dans les vues

Le paramètre de confiance des vues τ est appliqué à la matrice de variance-covariance Σ des actifs risqués. Les rentabilités mixtes Ψ sont distribuées autour des rentabilités implicites d'équilibre Π avec une matrice de variance-covariance proportionnelle à la matrice de variance-covariance initiale Σ . Le facteur de proportionnalité est τ . Plus τ est faible, plus nous aurons confiance dans l'allocation stratégique et non dans les vues. Dans le cas particulier où $\tau = 0$, les rentabilités espérées ne sont plus aléatoires et sont égales aux rentabilités implicites : $\Psi = \Pi$.

Nous calibrons ce paramètre en recherchant un compromis entre l'incertitude des vues et celle du marché, donc entre Ω et Σ :

$$\tau = \frac{\text{tr}(\Omega)}{e' P \Sigma P' e}$$

Nous conseillons néanmoins d'ajuster ce paramètre de confiance entre 5% et 10%.

Obtenir les rentabilités des vues à partir de notes

Il peut arriver que les vues associées à chaque actif i n'aient pas la forme d'une rentabilité mais celle d'une note $n_i \in \{-2; -1; 0; +1; +2\}$.

Il faut alors transformer les notes des vues sur les actifs en rentabilités pour obtenir le vecteur Q . Pour cela, nous déterminons une relation linéaire entre la rentabilité de la vue Q_i et celle implicite Π_i de la manière suivante :

$$Q_i = \Pi_i + n_i \sigma_i * \kappa$$

avec κ un facteur multiplicatif correspondant à la probabilité d'erreur de dispersion des rentabilités par rapport à l'incertitude associée à la vue quantifiée par $n_i \sigma_i$. Nous fixons souvent κ entre 0.3 et 0.5.

La contrainte de risque bêta

Il est possible d'ajouter des contraintes à l'optimisation tactique. Une des contraintes que nous privilégions dans ce cours est celle d'obtenir un bêta similaire entre l'allocation stratégique et l'allocation tactique, c'est-à-dire la même exposition au facteur de marché, ce qui est assez usité dans la pratique.

Nous définissons alors le bêta β^{BL} suivant :

$$\beta^{\text{BL}} = \frac{\omega^{**\prime} \Sigma \omega^*}{\omega^{*\prime} \Sigma \omega^*}$$

Rappelons que ω^{**} sont les poids de l'allocation tactique et ω^* les poids de l'allocation stratégique. Et nous calculons les nouveaux poids pour lesquels $\beta^{\text{BL}} = 1$.

Projet 1 Vous disposez des séries des prix de l'indice de marché français CAC 40, de l'indice du marché américain S&P 500 ainsi que de celui de l'indice japonais MSCI Japan.

1. Il vous est demandé de calculer les rentabilités journalières de ces indices de prix, ainsi que d'en réaliser une analyse statistique descriptive sommaire (moyenne, écart-type, skewness, kurtosis, histogramme, etc.).
2. Vous devez ensuite déterminer les frontières efficientes et les allocations des portefeuilles GMV et tangent. Puis vous devez proposer une allocation efficiente au sens de Markowitz pour 3 investisseurs de profils différents : le premier est très averse au risque (aversion égale à 10), le second est moyennement averse au risque (aversion égale à 2) et le dernier est riscophile (aversion égale à 0.5). Faites des propositions d'allocations avec et sans contraintes, et suivant des scénarios de marché différents (hausse, flat, baisse).
3. Enfin, développer un outil d'allocation tactique entre les 3 indices à l'aide de la modélisation de Black et Litterman. Il vous est demandé au préalable de démontrer à partir de la théorie statistique bayésienne l'expression des rentabilités mixtes. Une réflexion sur les paramètres du modèle de Black et Litterman sera au final indispensable.

CHAPITRE 2

ASSURANCE DE PORTEFEUILLE

Le deuxième thème de ce cours est celui de l'assurance de portefeuille. L'objectif de gestion est d'assurer un portefeuille actions contre une perte importante ; les techniques quantitatives sont essentiellement issues de l'utilisation des produits dérivés ainsi que de l'estimation de la perte contre laquelle le gérant veut se protéger.

Nous définissons un horizon T de gestion ainsi qu'une valeur plancher F_T en-dessous de laquelle la valeur du portefeuille ne doit pas tomber à l'horizon. Un cas particulier classique est celui de la garantie de la valeur initiale du portefeuille à horizon. Trois types de stratégie sont présentées :

1. la stratégie stop-loss,
2. la stratégie optionnelle,
3. la stratégie du coussin.

2.1 Stratégie stop-loss

Cette méthode est la plus simple. Nous considérons un portefeuille dont l'univers de gestion se réduit à un indice actions et à un actif monétaire sans risque. Le *stop-loss* est habituellement utilisé pour garantir un portefeuille investi entièrement en actif risqué, ici en actions.

La méthode stop-loss consiste à vendre l'indice actions lorsque la valeur de ce dernier touche la valeur plancher, et consécutivement à placer l'argent au taux sans risque. Le gérant achètera à nouveau l'indice actions lorsque la valeur de ce dernier repassera au-dessus de la valeur plancher. Nous allons décrire cette méthode à l'aide d'un exemple numérique simple.

Supposons une discrétisation du temps en 5 périodes. La valeur plancher est fixée à la date $T = 5$ (horizon de gestion) à $F_T = 100$, valeur de l'indice actions à la date initiale $t = 0$. Le taux d'intérêt est supposé constant et égal sur les 5 périodes à $r_f = 2\%$. La valeur du plancher F_T doit donc être actualisée¹ pour déterminer F_t à la date $t \leq T$:

$$F_t = \frac{F_T}{(1 + r_f)^{\frac{T-t}{T}}}$$

Ainsi, la valeur initiale F_0 du plancher garantissant une valeur du portefeuille supérieure ou égale à 100 à horizon est égale à :

$$F_0 = \frac{100}{1 + 0.02} \approx 98.04$$

Cette valeur évolue bien sûr à chaque date. L'indice actions évolue aussi mais de manière plus erratique. Son niveau va déterminer la composition du portefeuille stop-loss : vente de l'indice actions lorsque le plancher

1. Le taux entre 2 dates est égal à $(1 + r_f)^{\frac{1}{T}} - 1 = (1 + 0.02)^{\frac{1}{5}} - 1 \approx 0.40\%$.

est traversé, achat lorsque l'indice actions rebondit au-dessus du plancher. Nous supposons aussi qu'il n'y a pas de coûts de transaction.

Enfin, ajoutons que, dans la pratique, il n'est pas possible de transférer l'investissement juste au moment où l'actif risqué touche le plancher : il y a toujours un délai, ce qui est pris en compte dans l'exemple numérique.

Date	Plancher	Monétaire	Actions	Portefeuille		
				Actions	Monétaire	Total
0	98.04	100	100	100	0	100
1	98.43	100.40	105	105	0	105
2	98.82	100.80	98	0	98	98
3	99.21	101.20	97	0	98.39	98.39
4	99.60	101.60	102	98.78	0	98.78
5	100	102	106	102.65	0	102.65

TABLE 2.1 – Stratégie stop-loss

A la date 2, la valeur de l'indice actions (98) passe en-dessous de la valeur actualisée du plancher (98.82) : le gérant réinvestit alors tout son capital dans l'actif monétaire sans risque. A la date 4, la valeur de l'indice actions (102) est supérieure à celle du plancher actualisée (99.60) : c'est donc le signal pour transférer le capital dans l'indice actions pour la dernière période. On voit bien que le décalage temporel du premier transfert fait que cette stratégie n'est pas optimale car à la date 4, la valeur du portefeuille (98.78) est en revanche inférieure à celle du plancher. Le gérant, par chance dans cet exemple, a acheté l'indice actions juste avant une nouvelle hausse de ce dernier.

Cette stratégie simple a plusieurs limites :

1. les transferts de capital sont très importants. C'est tout ou rien : le portefeuille stop-loss est investi soit entièrement en actions, soit entièrement en monétaire. Les coûts de transaction peuvent alors être prohibitifs.
2. cette stratégie fonctionne lorsqu'il y a des tendances marquées sur le marché actions. En effet, on investit dans les actions après que la valeur de ces dernières a monté. Pour en retirer un profit, il faut qu'à la période suivante, les actions continuent de monter. Dans notre exemple, si les actions avaient subi une baisse entre les dates 4 et 5, la valeur du portefeuille à l'horizon aurait été inférieure au plancher. La garantie du capital n'est donc pas assurée dans un marché volatil, sauf à supposer que le transfert de capital entre actions et monétaire est réalisé juste au moment où le portefeuille touche le plancher, ce qui n'est malheureusement pas réaliste dans la pratique.

Les 2 méthodes suivantes vont permettre de dépasser les limites de la stratégie stop-loss.

2.2 Stratégie optionnelle

Pour introduire les stratégies optionnelles, prenons l'exemple d'un portefeuille dont le capital initial est de 100 et qui garantit 100% du capital dans 2 ans. On va alors acheter un zéro-coupon qui aura pour valeur 100 dans deux ans et dont la valeur aujourd'hui est $\frac{100}{(1+r_f)^2} \approx 96$, avec $r_f = 2\%$ le taux d'intérêt sans risque. On peut donc *risquer* ce qui reste du portefeuille, c'est-à-dire environ $100 - 96 = 4$, en étant certain de garantir dans les 2 ans 100% du capital initial investi. Avec ces 4, on achète des calls. Ceci permettra de profiter d'une partie de la hausse du marché actions sans prendre aucun risque. Le portefeuille ainsi géré est un fonds fermé à capital garanti, c'est-à-dire qu'on structure l'allocation au départ et on ne la change plus jusqu'à l'horizon.

Les stratégies optionnelles sont aussi dénommées *Option Based Portfolio Insurance* ou OBPI, et sont des *structures* simples permettant de garantir le capital d'un portefeuille d'actifs risqués.

La première méthode d'assurance de portefeuille à base d'options a été introduite par Leland et Rubinstein en 1976. Elle consiste à investir dans un actif risqué S couvert par un put sur cet actif. Cette stratégie permet, quelle que soit la valeur de l'actif risqué à l'échéance du put, de garantir un capital minimum égal au prix d'exercice K du put. Le plancher devient alors dans cette stratégie le strike du put $F_T = K$ et l'horizon la maturité T du put.

Cette stratégie se trouve être équivalente à celle qui achète K zéro-coupon de nominal 1 et un call de prix d'exercice K . Pour comprendre cela, il est tout d'abord nécessaire de définir la formule de parité call-put permettant de donner le prix d'un put européen P_t à partir de celui d'un call européen C_t en t :

$$C_t - P_t = S_t - Ke^{-r(T-t)}$$

Pour démontrer cette formule, il suffit de construire deux stratégies ayant les mêmes flux à maturité et d'utiliser l'AOA.

Soit la première stratégie qui consiste à acheter un call et à vendre un put, sur le même actif, de mêmes maturités et prix d'exercice. En $t < T$, ce portefeuille a pour valeur $C_t - P_t$, et en $t = T$, $(S_T - K)^+ - (K - S_T)^+ = S_T - K$.

La seconde stratégie, consistant à acheter le titre et à vendre K zéro-coupon d'échéance T , a le même flux en T , c'est-à-dire $S_T - K$. Et cette stratégie a pour valeur en $t < T$: $S_t - Ke^{-r(T-t)}$. Ainsi, par AOA, nous retrouvons la formule de parité call-put.

D'après cette dernière, la valeur de la stratégie OBPI est égale à :

$$\begin{aligned} V_t &= S_t + P_t = Ke^{-r(T-t)} + C_t \quad \forall t < T \\ V_T &= S_T + (K - S_T)^+ = K + (S_T - K)^+ \quad \text{à l'échéance } T \end{aligned}$$

Ces stratégies, utilisant soit un put, soit un call, garantissent bien le capital K à échéance T puisque :

$$V_T = \begin{cases} S_T & \text{si } S_T > K \\ K & \text{si } S_T \leq K \end{cases}$$

En plus de garantir le capital dans le cas de marché baissier, ces stratégies permettent, en outre, de profiter sensiblement de la hausse des marchés, c'est-à-dire lorsque $S_T > K$. En effet, nous avons alors pour une stratégie optionnelle utilisant un put :

$$\frac{V_T}{V_0} = \frac{S_T}{S_0} \frac{S_0}{S_0 + P_0}$$

Ainsi, la stratégie profite d'une hausse un peu inférieure, le facteur $\frac{S_0}{S_0 + P_0}$ est inférieur à 1, à celle des marchés actions tout en conservant le capital. Précisons que plus le plancher est élevé, plus le prix d'exercice du put s'élève et donc plus le put est cher. La garantie devient logiquement plus chère et le gain suite à

une hausse des actions moins élevée puisque l'exposition aux actions sera plus faible.

Dans le cas de la stratégie OBPI avec un call, si les marchés montent, le portefeuille profite de cette hausse à hauteur du *gearing*. Le portefeuille est composé d'un actif monétaire sans risque valant la garantie à échéance T et le reste est investi dans des calls. Le *gearing* est le niveau d'exposition du portefeuille à l'actif risqué via les calls déterminé de la manière suivante :

$$g = \frac{V_0 - F_0}{C_0} * \frac{S_0}{V_0}$$

Ce *gearing*, inférieur à 1, évalue la participation du portefeuille OBPI avec calls à la hausse de l'indice actions.

Une limite apparaît lorsqu'il n'existe pas de produits dérivés sur le sous-jacent géré. La solution est alors de répliquer la stratégie optionnelle à l'aide d'une allocation en actif monétaire et sous-jacent. Néanmoins, cette réplique n'assurera pas aussi parfaitement le portefeuille.

Partant de la stratégie OBPI avec un put et utilisant le pricing du call de Black et Scholes, nous obtenons :

$$\begin{aligned} V_t &= S_t + P_t \\ &= Ke^{-r(T-t)} + C_t \quad \forall t < T \\ &= Ke^{-r(T-t)} + S_t\Phi(d_1) - Ke^{-r(T-t)}\Phi(d_0) \\ &= S_t(1 + \Delta_t^P) + Ke^{-r(T-t)}(1 - \Phi(d_0)) \end{aligned}$$

$$\text{avec } d_0 = \frac{1}{\sigma\sqrt{T-t}} \left[\left(r - \frac{\sigma^2}{2} \right) (T-t) + \ln \frac{S_t}{K} \right] \text{ et } d_1 = d_0 + \sigma\sqrt{T-t}.$$

Cette expression nous permet de déterminer les allocations du portefeuille OBPI en actions et actif monétaire qui permettent de répliquer la stratégie optionnelle OBPI. Cette stratégie revient donc à investir en t $\frac{(1 + \Delta_t^P) S_t}{S_t + P_t}$ en actions et le reste en actif monétaire.

Les limites de ces stratégies OBPI sont consécutives à l'utilisation de produits dérivés. En effet, les hypothèses de leur évaluation peuvent poser problème (volatilité constante, diffusion gaussienne).

En outre, il est nécessaire de fixer un horizon. La dernière méthode va permettre de s'exonérer de la fixation de l'horizon : elle sera alors utilisée pour les fonds non plus fermés mais *ouverts*.

Enfin, les coûts de transaction peuvent être parfois importants dans le cadre de la réplique de la stratégie optionnelle.

2.3 Stratégie du coussin

La stratégie du coussin ou *Constant Proportion Portfolio Insurance* (CPPI) est une méthode relativement flexible.

Reprenons l'exemple précédent d'un portefeuille dont le capital initial est de 100 et qui garantit cette fois 95% de sa valeur à chaque instant. Il est composé d'un zéro-coupon et d'un actif risqué, un indice actions par exemple. La logique à première vue voudrait que l'on investisse 95 en zéro-coupon et seulement 5 en actions. Ces 5 correspondent à ce que l'on appelle le *coussin*, différence entre la valeur du portefeuille et la valeur plancher (valeur capitalisée de la garantie).

Mais cette logique fait l'hypothèse implicite que le marché actions peut subir une perte de -100% en un seul jour (si on suppose que l'allocation évolue quotidiennement), ce qui est peu vraisemblable. Ainsi, il est donc possible de *risquer* plus que le coussin à hauteur de la perte maximale potentielle que pourrait subir le marché actions.

Pour estimer cette perte potentielle ou *indice de stress*, il est classique d'introduire la notion de temps de retour τ de cette perte, fixé généralement entre 30 et 50 ans. τ permet alors de définir la probabilité qui déterminera le quantile de perte maximale tolérable pour la stratégie du coussin. Cette probabilité est égale à $\frac{1}{252 * \tau}$, 252 correspondant au nombre de jours généralement tradés sur un an. La Théorie des Valeurs Extrêmes peut être mobilisée dans le calcul de cet indice de stress.

Supposons que ce dernier vaille 15% pour un temps de retour $\tau = 50$ ans. Ceci signifie que le marché subit une perte inférieure à -15% une fois tous les 50 ans. Le marché peut donc perdre en une journée au maximum 15% et non pas 100%. En d'autres termes, sur un portefeuille de valeur 100, on peut perdre au maximum 15; comme dans notre portefeuille, on peut perdre au maximum 5 (la garantie est de 95%), on peut donc investir $5 * \frac{100}{15} = 5 * 6.67 \approx 33.35$. L'inverse de l'indice de stress $\frac{100}{15}$ s'appelle le multiplicateur. Si on investit en actif risqué 33.35, on est relativement certain de perdre au maximum 5 et on dépassera le plancher seulement une fois tous les 50 ans.

L'exposition e en actions est donc un multiplicateur m du coussin c : $e = c * m$. Le reste est investi en actif monétaire. La valeur du coussin évolue au cours du temps avec l'évolution du plancher, capitalisé, et celle de l'indice actions. Le montant investi en actions doit toujours être égal à e . Pour éviter les rebalancements trop fréquents, il est communément déterminé une tolérance sur le multiplicateur m (par exemple 10%).

Plus le multiplicateur est faible, plus la garantie est certaine; plus le multiplicateur est élevé, plus le portefeuille profite de la hausse du marché actions.

Des stratégies de coussin dynamiques, donc plus complexes, peuvent être aussi mises en place : nous pensons aux stratégies Dynamic Portfolio Insurance (DPI), déterminant un coussin dynamique, ou encore les stratégies Time Invariant Portfolio Protection (TIPP) contraignant la valeur plancher à évoluer non plus en fonction du taux sans risque mais en fonction de la valeur du portefeuille.

Projet 2 Réaliser un outil de simulation pour des stratégies OBPI et CPPI sur le CAC 40 avec un horizon d'un an, un taux sans risque constant de 2% sur un an, une valeur plancher définie à 95% du capital et sans coûts de transaction.

1. Pour la stratégie OBPI, il vous est demandé de répliquer la stratégie optionnelle à base de puts à l'aide d'une allocation en actions et actif monétaire.
2. Pour la stratégie CPPI, il vous est demandé de déterminer un multiplicateur adéquat, ainsi que d'appliquer une tolérance de 10% autour du multiplicateur pour réallouer votre portefeuille.

Proposer plusieurs modélisations probabilistes et statistiques de l'indice actions. Montrer l'impact de la modélisation de cet indice sur l'assurance du portefeuille.

CHAPITRE 3

MOTEURS DE PERFORMANCE

Le troisième et dernier thème de ce cours traite des moteurs de performance. L'objectif de gestion est de créer de la performance ; les techniques quantitatives utilisées sont essentiellement économétriques et statistiques : régression linéaire multiple, filtre de Kalman, ACP, modélisation auto-régressive, etc.

Les moteurs de performance peuvent s'intégrer dans une gestion dénommée *core-satellite*, composée d'un coeur d'allocation classique et de satellites développant des stratégies quantitatives performantes.

Précisons enfin que deux types de moteurs de performance sont possibles : les stratégies *long-only* qui achètent seulement lorsque le signal quantitatif défini sur une classe d'actifs est positif, et les stratégies *long-short* qui vendent en plus lorsque les signaux du modèle sont négatifs. Il est classiquement ajouté une confirmation de signal lorsque la périodicité des signaux est courte : par exemple l'achat se réalisera lorsque 2 signaux quotidiens positifs seront successifs.

Nous allons dans la suite présenter une technique quantitative innovante (le filtre de Kalman) qui donnera lieu à un projet de création d'un moteur de performance utilisant cette technique ; puis nous développerons un thème classique à la base de nombreux moteurs de performance : le phénomène momentum.

3.1 Techniques de régression linéaire

3.1.1 Préliminaires essentiels à la mise en place d'un modèle de régression

Nous n'allons pas rappeler les fondements mathématiques du modèle de régression linéaire multiple ni les techniques classiques de diagnostic du modèle (R^2 , colinéarité, méthodes de sélection des variables *stepwise*, homoscedasticité, distance de Cook, etc.) ; mais plutôt expliciter comment mettre en oeuvre un modèle de régression sur des échantillons de données et comment évaluer son pouvoir prédictif.

Régression fallacieuse

Au préalable, il est primordial d'éviter toute régression fallacieuse (*spurious regression*), c'est-à-dire un modèle essayant de régresser une variable intégrée d'ordre 1 (non-stationnaire) sur d'autres variables non-stationnaires. Ce problème a été mis en évidence par Granger et Newbold [5]. Une régression fallacieuse va conclure à des relations erronées entre variables, car statistiquement invalides. Il est donc primordial de travailler avec des données stationnaires (les rentabilités des actifs financiers le sont par exemple).

Régressions récursives ou glissantes

En outre, un problème peut apparaître lorsque l'estimateur $\hat{\beta}$ se révèle instable suivant des sous-échantillons de l'échantillon total des données de taille n . En effet, il n'est pas rare que les sensibilités $\hat{\beta}$ évoluent dans le temps par exemple. Quelles méthodes d'estimation utiliser alors pour capter la variabilité des $\hat{\beta}$? La question essentielle qui se pose est en fait celle de la partie de l'échantillon total des données à considérer pour déterminer les paramètres de la régression. Deux possibilités s'offrent à nous :

- Soit on fixe le point de départ de la construction du sous-échantillon (y_1, \dots, y_{n_r}) et on *empile* les données au fur et à mesure qu'elles apparaissent : le deuxième sous-échantillon devient alors (y_1, \dots, y_{n_r+1}) et ainsi de suite. On réalise des régressions récursives.
- Soit on fixe une taille d'échantillon n_g inférieure à n et on construit plusieurs sous-échantillons de taille n_g au sein de l'échantillon total. On fait ainsi *glisser* nos échantillons, de taille fixe n_g , au fur et à mesure du temps : (y_1, \dots, y_{n_g}) pour le premier sous-échantillon, (y_2, \dots, y_{n_g+1}) pour le deuxième, et ainsi de suite. On réalise alors des régressions glissantes.

Pour capter la réactivité des $\hat{\beta}$, nous privilégierons la régression glissante. Le choix de la taille n_g (comme pour celui de n_r) des sous-échantillons glissants n'a pas de règle figée. En fait, il dépend d'un arbitrage entre réactivité des estimateurs et bonnes propriétés statistiques. L'objectif étant de capter le plus précisément possible le moment où le régime des β a changé, plus l'échantillon sera de petite taille, moins il sera pollué par les valeurs du passé mais plus il aura des propriétés statistiques mauvaises.

Il est possible aussi de donner des poids plus importants aux données du passé proche. On construit alors un nouvel échantillon dont on assigne aux données des poids décroissant exponentiellement par exemple. Une solution alternative, qui sera l'objet de la section suivante, est l'utilisation du filtre de Kalman pour avoir des paramètres de régression robustes et réactifs en même temps.

Évaluation du pouvoir prédictif

Enfin, il va falloir évaluer le pouvoir prévisionnel du modèle pour les stratégies de prévision. On réalise alors un backtest de nos stratégies. Le principe du backtest est de distinguer sur l'échantillon total des données un sous-échantillon d'apprentissage de taille n_a sur lequel on va estimer les paramètres du modèle et un sous-échantillon de backtest de taille n_b sur lequel on va tester la robustesse du modèle. Deux indicateurs peuvent alors être déterminés :

- Le Root Mean Squared Error (RMSE) égal à $\sqrt{\frac{1}{n_b} \sum_{i=1}^{n_b} (\hat{y}_i - y_i)^2}$ avec \hat{y}_i la valeur prévue par le modèle défini sur l'échantillon d'apprentissage à partir des observations x_i de l'échantillon de backtest ; ces n_b prévisions sont alors comparées aux valeurs y_i de l'échantillon de backtest réellement réalisées.
- Le taux de bon classement égal à $\frac{\text{card}[\hat{y}_i * y_i > 0]}{n_b}$ permettant de juger le bon sens de la prévision \hat{y}_i .

Il est possible d'ajouter des seuils pour ne prendre en compte que les prévisions importantes en valeur absolue, c'est-à-dire celles qui font gagner de l'argent.

Ces indicateurs déterminés sur les modèles de régression sont à comparer à un modèle de prévision naïve, prévoyant pour la valeur de demain la valeur d'aujourd'hui : on l'appelle la marche aléatoire. Elle signifie que les marchés sont efficients et qu'aucune information passée ne peut aider à prévoir le prix d'un actif.

Prise en compte du change

Précisons enfin les transformations essentielles à réaliser lorsque les variables explicatives sont évaluées à l'aide de devises différentes. Considérons que la devise étrangère est le dollar, les actifs étrangers ont pour valeur dans cette devise $I_t^{\$}$ en t , et que la devise domestique est l'euro, le taux de change de l'euro en dollars a pour valeur C_t en t .

Trois choix sont alors possibles :

1. On détermine les rentabilités en les conservant dans la devise étrangère. On estime alors que les acteurs du marché observe ces actifs dans leur propre devise.

2. On convertit la rentabilité de l'actif étranger dans la devise domestique. On obtient alors la rentabilité en euros suivante :

$$R_t^{\text{EUR}} = \frac{I_t^{\$} C_{t-1}}{C_t I_{t-1}^{\$}} - 1$$

3. On couvre (*hedge*) l'actif étranger contre le risque de variation du taux de change, ce qui a un coût égal au différentiel des taux courts américain et européen $r_f^{\$} - r_f^{\text{EUR}}$ de la période précédente. On obtient alors la rentabilité en euros *hedgée* suivante :

$$R_t^{\text{HEDGE}} = R_t^{\$} - (r_f^{\$} - r_f^{\text{EUR}})$$

3.1.2 Filtre de Kalman

Le filtre de Kalman, utilisé dans le cadre d'un modèle linéaire gaussien, va permettre de déterminer des estimations des coefficients de régression dynamiques et robustes. Nous allons tout d'abord présenter la technique du filtre de Kalman de manière générale (cf. Harvey [6]), puis présenter cette technique dans le cadre de la régression.

Cadre général et modélisation espace-état

Le filtre de Kalman a originellement été utilisé dans les domaines de l'industrie et du traitement du signal : radar, photographie, radio, ordinateurs, et plus récemment en finance. Le filtrage ainsi obtenu permet d'éliminer les perturbations inhérentes à la mesure des observations. Nous distinguons les notions de filtrage (application du filtre pour les données du présent), de lissage (appliqué aux données du passé) et de prédiction (appliqué au futur).

Soit y_t une série chronologique multivariée de dimension m . Cette variable observée est reliée à un vecteur d'état z_t de dimension p via l'**équation de mesure** :

$$y_t = H z_t + \varepsilon_t$$

H est une matrice de dimension $m \times p$. Elle est supposée ici constante (mais elle peut évoluer). ε_t est un bruit blanc supposé gaussien centré et de matrice de variance-covariance R , supposée aussi constante. Généralement, le vecteur d'état z_t est inobservable. Nous supposons alors qu'il est généré par un processus markovien d'ordre 1. Nous obtenons l'**équation de transition** ou **d'état** suivante :

$$z_t = A z_{t-1} + B u_{t-1} + \eta_t$$

A est une matrice $p \times p$ et B une matrice $p \times l$. Encore une fois, nous les supposons constantes, alors qu'elles peuvent évoluer dans le temps. A relie la variable z_t à son état précédent et B relie la variable d'état z_t à un ensemble de l variables de contrôle optionnelles u_{t-1} . Enfin, η_t est un bruit blanc, indépendant de ε_t , et gaussien centré de matrice de variance-covariance Q , supposée aussi constante.

Nous venons de définir la représentation espace-état à partir de laquelle nous allons déterminer le filtre de Kalman, procédure récursive qui permettra de construire un estimateur optimal de vecteur d'état inobservable z_t à partir de l'information en t . L'intérêt premier dans les applications économétriques du filtre de Kalman est la détermination d'une fonction de vraisemblance permettant alors d'estimer les paramètres inconnus du modèle espace-état.

Soit \hat{z}_{t-1} l'estimateur optimal de z_{t-1} sachant l'information disponible en $t-1$ définie par la mesure y_{t-1} . Soit P_{t-1} la matrice de variance-covariance de l'erreur d'estimation de taille $p \times p$:

$$P_{t-1} = \mathbb{E} [(z_{t-1} - \hat{z}_{t-1})(z_{t-1} - \hat{z}_{t-1})']$$

Sachant \hat{z}_{t-1} et P_{t-1} , l'estimateur optimal de z_t et la matrice de variance-covariance de l'erreur d'estimation définissent les **équations de prédiction** suivantes :

$$\begin{aligned}\hat{z}_{t|t-1} &= A\hat{z}_{t-1} + Bu_{t-1} \\ P_{t|t-1} &= AP_{t-1}A' + Q\end{aligned}$$

Lorsque la nouvelle observation y_t est disponible, l'estimateur $\hat{z}_{t|t-1}$ peut être mise à jour. Nous obtenons alors les **équations de mise à jour** ou **de correction** suivantes avec l'estimateur \hat{z}_t et la matrice de variance-covariance des erreurs d'estimation P_t :

$$\begin{aligned}\hat{z}_t &= \hat{z}_{t|t-1} + K_t (y_t - H\hat{z}_{t|t-1}) \\ P_t &= (I - K_t H)P_{t|t-1}\end{aligned}$$

avec $K_t = P_{t|t-1}H' (HP_{t|t-1}H' + R)^{-1}$. La matrice K_t est appelée la matrice de gain de Kalman. Nous ne démontrons pas son calcul issu de la minimisation de la matrice de variance-covariance P_t .

Lorsque le nouvel estimateur en t est déterminé avec les équations de correction, nous répétons le processus en calculant le nouvel estimateur des équations de prédiction, qui permettront de construire le gain K_{t+1} et ainsi l'estimateur des équations de correction.

La difficulté est la détermination des paramètres initiaux : Q et R sont généralement des matrices diagonales dont les éléments diagonaux sont relativement faibles. Enfin, z_0 et P_0 sont définis en cohérence avec les données observables.

Soit ψ l'ensemble des paramètres inconnus : $\psi = (A, B, H, Q, R)$. Il est maintenant nécessaire d'estimer ψ . Pour répondre à cet objectif, on va déterminer à partir de la filtration une fonction de vraisemblance sur les observations y_t pour les dates $1, \dots, T$. La vraisemblance $\mathcal{L}(y; \psi)$ est fonction des densités de probabilité conditionnelles de y_t :

$$\mathcal{L}(y; \psi) = \prod_{t=1}^T p(y_t | y_{t-1}, y_{t-2}, \dots, y_1)$$

Si le vecteur d'état initial z_0 est gaussien (en plus des erreurs ε_t et η_t), la probabilité conditionnelle de y_t est aussi gaussienne. Alors, conditionnellement à $y_{t-1}, y_{t-2}, \dots, y_1$, z_t est gaussien de moyenne $\hat{z}_{t|t-1}$ et de matrice de variance-covariance $P_{t|t-1}$. Et comme on peut écrire :

$$y_t = H\hat{z}_{t|t-1} + H(z_t - \hat{z}_{t|t-1}) + \varepsilon_t$$

nous obtenons que y_t est gaussien conditionnellement à l'information en $t-1$ de moyenne :

$$\mathbb{E}_{t-1}[y_t] = H\hat{z}_{t|t-1}$$

et de matrice de variance-covariance $HP_{t|t-1}H' + R$.

La fonction de log-vraisemblance à maximiser suivant les paramètres inconnus ψ est alors égale à :

$$\ln \mathcal{L} = -\frac{mT}{2} \ln(2\pi) - \frac{1}{2} \sum_{t=1}^T \ln |HP_{t|t-1}H' + R| - \frac{1}{2} \sum_{t=1}^T v_t' (HP_{t|t-1}H' + R)^{-1} v_t$$

avec $v_t = y_t - H\hat{z}_{t|t-1}$.

Précisons qu'il existe des applications du filtre de Kalman dans des cas plus généraux. Par exemple, si nous considérons un modèle non linéaire, il a été développé le filtre de Kalman étendu.

Filtre de Kalman et régression linéaire multiple

Nous considérons une représentation espace-état décrivant un modèle linéaire de régression d'une variable dépendante y_t ($m = 1$) sur p variables exogènes x_t . Nous avons alors les équations de mesure et d'état suivantes :

$$\begin{aligned} y_t &= x_t' \beta_t + \varepsilon_t \\ \beta_t &= \beta_{t-1} + \eta_t \end{aligned}$$

avec $\varepsilon_t \sim \mathcal{N}(0, R)$ et $\eta_t \sim \mathcal{N}(0, Q)$. Les coefficients de régression β_t représentent la variable d'état du modèle.

A partir de cette représentation, nous appliquons l'algorithme du filtre de Kalman pour déterminer l'évolution des β_t ainsi que estimer les matrices R et Q à l'aide de la fonction de vraisemblance définie précédemment.

Les différentes techniques de régression (récursive, glissante, filtre de Kalman) peuvent être utilisées dans de nombreux cas : réplification de hedge funds, détermination d'alpha dans les modèles CAPM et Fama-French pour déterminer la sur- ou sous-évaluation d'un actif financier, etc. Nous proposons le projet suivant d'application de ces différentes techniques.

Projet 3 *Le Bund est un future dont le sous-jacent est constitué des emprunts d'État allemand à 10 ans. Il est suivi de très près par les intervenants financiers car il donne la direction des marchés de taux de la zone Euro. Nous pouvons néanmoins réussir à prévoir sa rentabilité à l'aide de variables macro-financières classiques : indice actions, pente de taux, spread corporate (proxy de l'aversion au risque), momentum du prix du pétrole, etc.*

Proposer une stratégie rigoureuse et profitable à l'aide des différentes variables économiques et financières données et des techniques de régression développées dans cette section.

1. *Il vous faut tout d'abord transformer si nécessaire les variables explicatives puis en faire une analyse statistique descriptive sommaire (moyenne, écart-type, skewness, kurtosis, histogramme, etc.).*
2. *A l'aide de régressions, vous devrez prévoir la rentabilité du Bund de la période suivante à l'aide de l'ensemble ou d'une partie des variables explicatives données. Il vous faudra déterminer le pouvoir prévisionnel (RMSE, classement bonne/mauvaise prévision) de votre modèle statistique, que vous pourrez comparer à une simple marche aléatoire.*
3. *Puis vous déterminerez la performance des stratégies long-only et long-short à comparer en termes de ratios de performance à une position d'achat sur le Bund.*

3.2 Momentum de taux

Voici un autre exemple de moteur de performance s'appuyant sur 2 techniques statistiques : l'Analyse en Composantes Principales (ACP) et la modélisation auto-régressive ; mais aussi sur le phénomène momentum.

Jegadeesh et Titman [8] ont montré en 1993 la rentabilité d'une stratégie achetant des titres dont la rentabilité des 6 derniers mois était forte et vendant les titres dont la rentabilité était faible. Le momentum de prix ici signifie que les agents n'ont pas totalement intégré l'information disponible et que l'adaptation peut mettre plus de 6 mois. Hong et Stein [7] ont alors tenté de développer un modèle économique expliquant de manière normative la sous-réaction des agents à la diffusion de l'information créant cet effet momentum de prix.

Les stratégies momentum de prix, révélées à l'origine par Jegadeesh et Titman [8] sur le marché des actions américain, ont été largement étudiées et semblent aujourd'hui faire l'unanimité. Néanmoins, ces stratégies ont peu fait l'objet d'étude sur le marché obligataire. C'est ce que nous allons tenter de faire dans cette section : modéliser les facteurs communs, expliquant la dynamique hebdomadaire de la structure par terme des taux d'intérêts zéro-coupon, pouvoir ainsi prédire l'évolution des taux, à l'aide des modèles de séries temporelles, et appliquer ces modèles à la sélection de portefeuilles. Le momentum de taux sera alors d'horizon plus court (1 semaine) que le momentum révélé sur le marché des actions américain (6 mois).

3.2.1 Analyse en Composantes Principales

L'étude statistique de la structure par terme des taux d'intérêts a été initiée par Litterman et Scheinkman [10]. Ils proposent d'expliquer la variation des rentabilités des titres à revenu fixe par trois facteurs déterminant la courbe des taux américains : le niveau global des taux, la pente de la courbe des taux et sa courbure. Nous allons aussi, à leur manière, étudier la décomposition en facteurs communs de la courbe des taux à l'aide de l'Analyse en Composantes Principales (ACP).

Cet outil statistique s'est développé grâce à la psychométrie. En effet, dans ce domaine, les variables explicatives (contrairement à l'économétrie) sont rares ; mettre des chiffres derrière le comportement d'un individu subjectif n'est pas chose aisée. Pour résoudre ce problème et tout de même construire des modèles mathématiques, on suppose que le comportement d'un individu est régi par des facteurs quantitatifs latents mais difficilement observables.

L'objectif essentiel de l'ACP est d'expliquer les corrélations entre un nombre élevé de variables quantitatives par un nombre plus restreint de facteurs latents ou composantes principales, qui représentent des variables inobservables (cf. [9] et [11]). L'ACP consiste donc à transformer les p variables d'origine x_1, \dots, x_p en p nouvelles variables f_1, \dots, f_p (les composantes principales) de variance maximale, non corrélées deux à deux et qui s'expriment comme combinaison linéaire des variables d'origine.

Soit x le vecteur composé des p variables d'étude de la population considérée qui ont pour matrice de variance-covariance Σ . La méthode de l'ACP consiste à diagonaliser Σ . Nous obtenons alors $\Sigma = \Phi \Lambda \Phi'$ avec Φ la matrice carrée composée des p vecteurs propres ϕ_j (en colonne) et Λ la matrice diagonale des p valeurs propres λ_j .

L'objectif est de classer les p différentes valeurs propres suivant leur ordre de grandeur : le vecteur propre ϕ_1 associé à la plus grande valeur propre λ_1 permet alors de construire la première composante principale captant la plus importante variabilité.

Les composantes principales (CP) sont données par :

$$f = \Phi' x$$

où f est le vecteur des p facteurs latents ou composantes principales f_i . La variance de la CP i est égale à la valeur propre λ_i .

Nous obtenons au final le modèle factoriel suivant :

$$x = \Phi f$$

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \phi_{11} & \dots & \phi_{1p} \\ \vdots & & \vdots \\ \phi_{p1} & \dots & \phi_{pp} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_p \end{bmatrix}$$

Pour chaque variable, nous avons :

$$x_i = \sum_{j=1}^p \phi_{ij} f_j \quad i = 1, \dots, p$$

Les ϕ_{ij} représentent aussi ce que nous appellerons les *factor loadings*. Représenter ces derniers en fonction des variables d'origine ou représenter les composantes principales revient aux mêmes types d'interprétation. Par souci de parcimonie, nous n'allons conserver que les k premiers facteurs, $k < p$, captant la plus grande part de la variabilité totale (utilisation du *screeplot*) et nous supposons que pour chaque variable, nous avons :

$$x_i = \sum_{j=1}^k \phi_{ij} f_j + \varepsilon_i \quad i = 1, \dots, p \quad (3.1)$$

avec $\varepsilon_i = \sum_{j=k+1}^p \phi_{ij} f_j$ les résidus négligeables.

Ceci nous permet de réduire l'ensemble des données à un ensemble plus restreint de facteurs représentant au mieux leur variabilité.

L'hypothèse essentielle à l'application de l'ACP à un échantillon est celle que les données des p variables sont stationnaires et issues d'une loi Normale multivariée. Alors, les valeurs et vecteurs propres issus de la décomposition spectrale de l'estimateur empirique S de Σ constituent les estimateurs du Maximum de Vraisemblance de Λ et Φ . La stationnarité est l'hypothèse essentielle (à vérifier à l'aide du test de Dickey-Fuller augmenté).

Ajoutons que la valeur prise par l'observation k sur le facteur j est égale à :

$$c_{kj} = \sum_{i=1}^p \phi_{ij} x_{ki}$$

Nous appelons ces valeurs les "factor scores".

3.2.2 Bootstrap et ACP

Statistiquement, il est primordial d'étudier la stabilité des Composantes Principales. Ceci peut être fait en distinguant différentes périodes dans le temps mais aussi à l'aide du bootstrap (cf. Efron [3]).

Soit x la matrice des données d'origine des p variables de taille $p \times n$. Nous appelons x^* la matrice des données bootstrap. Les lignes x_j^* de x^* correspondent à un échantillon de taille n extrait des lignes de x . Un échantillon bootstrap $(x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*)$ est défini comme un échantillon aléatoire de taille n . $(x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*)$ n'est pas identique à (x_1, x_2, \dots, x_n) mais est une version aléatoire ou encore un ré-échantillonnage de (x_1, x_2, \dots, x_n) . Les lignes $(x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*)$ de la matrice x^* sont issues des données originales x , certaines apparaissant aucune fois, d'autres une fois, d'autres deux fois, etc.

Après avoir généré la matrice x^* , nous décomposons en valeurs singulières sa matrice de variance-covariance pour obtenir les 3 vecteurs propres principaux. Nous réalisons plusieurs répliques bootstrap (nous avons B ré-échantillons bootstrap) et nous obtenons ainsi B ensembles de valeurs et vecteurs propres. Nous calculons alors les écart-types des B factor loadings pour chaque valeur des trois vecteurs propres.

3.2.3 Stratégie momentum de taux

Le momentum de taux apparaît s'il est découvert une persistance temporelle sur les taux. Cette dernière est révélée classiquement sur un horizon court (1 semaine). Elle peut se modéliser par exemple à l'aide d'un modèle auto-régressif d'ordre 1 sur les séries temporelles des facteurs latents de la dynamique des taux. Lorsque le modèle est défini de manière robuste, on peut appliquer une stratégie quantitative *long-short* profitable.

Tout d'abord, nous déterminons une stratégie Benchmark qui suit le principe suivant : acheter un taux risqué moyen-long terme et emprunter au taux sans risque 3 mois.

Grâce au modèle prédictif, nous allons pouvoir améliorer le Benchmark de la manière suivante : si la rentabilité de l'obligation risquée calculée à l'aide du modèle prédictif est supérieure à celle de l'actif sans risque, alors nous conservons la stratégie précédente ; au contraire, si elle est inférieure, nous décidons d'acheter le taux sans risque et de vendre l'obligation risquée.

Précisons les approximations utilisées pour les rentabilités hebdomadaires des titres de taux. Notons pour cela $y(t, \tau)$ le taux en t de maturité τ et $dy(t, \tau) = y(t, \tau) - y(t - 1, \tau)$ la différence première des taux. L'actif sans risque a pour rentabilité $r(t, 3M)$:

$$r(t, 3M) = y(t - 1, 3M) * \frac{1}{52}$$

L'actif risqué a pour rentabilité $r(t, \tau)$:

$$r(t, \tau) = -\frac{\tau}{1 + y(t - 1, \tau)} dy(t, \tau) + y(t - 1, \tau) * \frac{1}{52}$$

car la duration d'un zéro-coupon est égale à sa maturité.

La stratégie momentum de taux va donc s'appuyer sur la comparaison entre les rentabilités de l'actif sans risque $r(t, 3M)$ et celles de l'actif risqué prévues $\hat{r}(t, \tau)$ à l'aide du modèle prédictif, par exemple sur les facteurs latents, appliquées aux différences premières $\hat{dy}(t, \tau)$. En effet, le phénomène momentum de taux peut nous procurer une prévision pour chacun des principaux facteurs latents en t et nous aurons dans ce cas :

$$\hat{dy}(t, \tau) = \sum_{i=1}^k \phi_i(\tau) \hat{f}_i(t)$$

Projet 4 *Proposer une stratégie rentable exploitant le momentum de taux. Vous disposez des données hebdomadaires de la structure par terme des taux zéro-coupon américains. Les étapes du projet sont les suivantes :*

1. *Réaliser une ACP sur les données adéquates et vérifier la stabilité des composantes principales que vous aurez sélectionnées.*
2. *Modéliser le caractère auto-régressif des facteurs latents. Est-ce stable dans le temps ? Évaluer la bonne prévision de ces modèles sur les taux. Comparer à une prévision sur les taux bruts sans passer par les facteurs latents.*
3. *Évaluer la stratégie momentum de taux pour les obligations de maturités 2 et 10 ans puis déterminer la fréquence des rebalancements.*

CONCLUSION

Ce cours, espérons-le, a permis d'introduire les concepts fondamentaux pour construire une stratégie quantitative. Évidemment, la liste des techniques quantitatives présentées ici n'est pas exhaustive. La crise actuelle n'est pas propice au développement de stratégies innovantes étant donné le discrédit sur certaines stratégies que peu d'acheteurs comprenaient. L'enjeu aujourd'hui est donc bien de continuer tout de même à innover avec une exigence supplémentaire de transparence et de relative simplicité.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] BLACK, F. & LITTERMAN, R., 1990, *Asset Allocation : Combining Investor Views with Market Equilibrium*, Fixed Income Research, Goldman Sachs.
- [2] CLAUSS, P., 2011, *Gestion de Portefeuille*, Dunod.
- [3] EFRON, B., 1995, *Le bootstrap et ses applications*, CISIA.
- [4] FABOZZI, F., FOCARDI, S. & KOLM, P., 2006, *Financial Modelling of the Equity Market*, Wiley Finance.
- [5] GRANGER, C.W.G. & NEWBOLD, P., 1974, *Spurious Regressions in Econometrics*, Journal of Econometrics, 26, 1045-1066.
- [6] HARVEY, A.C., 1989, *Forecasting, Structural Time Series Models and the Kalman Filter*, Cambridge University Press.
- [7] HONG, H. & STEIN, J.C., 1999, *A Unified Theory of Underreaction, Momentum Trading and Overreaction in Asset Markets*, Journal of Finance, 54, 2143-2184.
- [8] JEGADEESH, N. & TITMAN, S., 1993, *Returns to Buying Winners and Selling Losers : Implications for Stock Market Efficiency*, Journal of Finance, 48, 65-91.
- [9] JOLLIFFE, I.T., 2002, *Principal Component Analysis*, Second Edition, Springer.
- [10] LITTERMAN, R. & SCHEINKMAN, J., 1991, *Common Factors Affecting Bond Returns*, Journal of Fixed Income, 1, 54-61.
- [11] MARDIA, K.V., KENT, J.T. & BIBBY, J.M., 2003, *Multivariate Analysis*, Academic Press, London.
- [12] MARKOWITZ, H., 1952, *Portfolio Selection*, Journal of Finance, 7, 77-99.
- [13] MERTON, R.C., 1972, *An Analytic Derivation of the Efficient Portfolio Frontier*, Journal of Financial and Quantitative Analysis, 7, 1851-1872.
- [14] PEROLD, A.F. & SHARPE, W.F., 1988, *Dynamic Strategies for Asset Allocation*, Financial Analysts Journal, 16-27.