
Planche 1

Ce sujet d'oral est composé de deux exercices. Vous présenterez ces deux exercices à l'oral, dans l'ordre de votre choix.

Préparation : 30 min - Interrogation : 30 min

Exercice 1 Soit $f : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction dérivable, $f(0) = 0$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$.
Montrer qu'il existe $c \in \mathbb{R}^{+*}$ tel que $f'(c) = 0$.

Exercice 2 Soit E un \mathbb{R} -espace vectoriel de dimension n et soit $f \in \mathcal{L}(E)$. On suppose qu'il existe un entier $p \geq 2$ tel que $f^p = 0$ et $f^{p-1} \neq 0$.

1. Montrer que la famille $\{x, f(x), \dots, f^{p-1}(x)\}$ est une famille libre de E si et seulement si $f^{p-1}(x) \neq 0$.
2. Pour tout $0 \leq q$, on note r_q la dimension de $\text{Im} f^q$. Montrer que $p \cdot r_{p-1} \leq n$.
3. En déduire pour tout $q \leq p - 1$ l'inégalité

$$(p - q) \cdot r_{p-1} \leq r_q$$

(on pourra regarder la restriction de f à un sous-espace bien choisi.)