

1 Lois usuelles dans \mathbb{R}

1.1 Lois discrètes

Loi	Paramètre(s)	Fonction de masse	Espérance	Variance	Modélisation	Observations
Dirac δ_a	a	$\pi(x) = \mathbb{I}_a(x), x \in \mathbb{R}$	a	0	X est une variable aléatoire prenant la valeur a quel que soit le résultat de l'expérience.	Fonction caractéristique (F.c.) $\varphi(t) = e^{ita}$.
Uniforme sur $\{1, \dots, n\}$		$\pi(x) = \frac{1}{n}, x \in \{1, \dots, n\}$	$\frac{n+1}{2}$	$\frac{n^2-1}{12}$	X est une variable aléatoire désignant un nombre entier compris entre 1 et n choisi au hasard, de façon équiprobable.	
Bernoulli $\mathcal{B}(p)$	$p \in [0, 1]$	$\pi(x) = p^x(1-p)^{1-x},$ $x \in \{0, 1\}$	p	$p(1-p)$	Dans une expérience à deux issues - succès et échec - avec une probabilité de succès égale à p , X est la variable aléatoire qui vaut 1 si l'expérience conduit à un succès, 0 sinon.	Si $X_i \sim \mathcal{B}(p)$ pour $i = 1, \dots, n$, $\{X_i, i = 1, \dots, n\}$ indépendantes, $\sum_{i=1}^n X_i \sim \mathcal{B}(n, p)$. F.c. $\varphi(t) = pe^{it} + (1-p)$.
Binomiale $\mathcal{B}(n, p)$	$n \in \mathbb{N}^*, p \in [0, 1]$	$\pi(x) = \binom{n}{x} p^x(1-p)^{n-x},$ $x \in \{0, 1, \dots, n\}$	np	$np(1-p)$	On répète n fois l'expérience à deux issues de la loi de Bernoulli de façon indépendante. X est la variable aléatoire correspondant au nombre total de succès obtenus.	Si $X_1 \sim \mathcal{B}(n_1, p), X_2 \sim \mathcal{B}(n_2, p)$, X_1 et X_2 indépendantes, alors $X_1 + X_2 \sim \mathcal{B}(n_1 + n_2, p)$. Si $X \sim \mathcal{B}(n, p)$, alors $n - X \sim \mathcal{B}(n, 1-p)$. F.c. $\varphi(t) = (pe^{it} + (1-p))^n$.
Poisson $\mathcal{P}(\lambda)$	$\lambda > 0$	$\pi(x) = \frac{\lambda^x}{x!} e^{-\lambda}, x \in \mathbb{N}$	λ	λ	Loi limite d'une binomiale de paramètres (n, p) lorsque $n \rightarrow +\infty$, $p \rightarrow 0, np \rightarrow \lambda$.	Si $X_1 \sim \mathcal{P}(\lambda_1), X_2 \sim \mathcal{P}(\lambda_2)$, X_1 et X_2 indépendantes, alors $X_1 + X_2 \sim \mathcal{P}(\lambda_1 + \lambda_2)$. F.c. $\varphi(t) = e^{\lambda(e^{it}-1)}$
Géométrique $\mathcal{G}(p)$	$p \in [0, 1]$	$\pi(x) = (1-p)^{x-1}p,$ $x \in \{1, 2, \dots\}$	$\frac{1}{p}$	$\frac{1-p}{p^2}$	On répète plusieurs fois l'expérience à deux issues de la loi de Bernoulli, de façon indépendante. X est la variable aléatoire correspondant au nombre de fois où il a fallu répéter l'expérience pour obtenir un succès.	F.c. $\varphi(t) = pe^{it}/(1-(1-p)e^{it})$.

Loi	Paramètre(s)	Fonction de masse	Espérance	Variance	Modélisation	Observations
Binomiale négative	$n \in \mathbb{N}^*, p \in [0, 1]$	$\pi(x) = \binom{x-1}{n-1} p^n (1-p)^{x-n},$ $x \in \{n, n+1, \dots\}$	$\frac{n}{p}$	$\frac{n(1-p)}{p^2}$	On répète plusieurs fois l'expérience à deux issues de la loi de Bernoulli, de façon indépendante. X est la variable aléatoire correspondant au nombre de fois où il a fallu répéter l'expérience pour obtenir n succès.	Si $n = 1$, on retrouve la loi géométrique. Si X_1 suit une loi binomiale négative de paramètres (n_1, p) , X_2 suit une loi binomiale négative de paramètres (n_2, p) , X_1 et X_2 indépendantes, alors $X_1 + X_2$ suit une loi binomiale négative de paramètres $(n_1 + n_2, p)$.
Hypergéométrique	$N \in \mathbb{N}^*,$ $N_1 \in \{1, \dots, N\},$ $n \in \{1, \dots, N\}$	$\pi(x) = \frac{\binom{N_1}{x} \binom{N-N_1}{n-x}}{\binom{N}{n}},$ $x \in \mathbb{N}, x \geq \max(0, n-N+N_1),$ $x \leq \min(n, N_1)$	$\frac{nN_1}{N}$	$\frac{nN_1(N-N_1)(N-n)}{N^2(N-1)}$	On tire n boules sans remise dans une urne contenant N_1 boules blanches, $N - N_1$ boules noires. X est la variable aléatoire correspondant au nombre total de boules blanches tirées.	On retrouve la loi binomiale en faisant tendre N_1 et N vers $+\infty$, $\frac{N_1}{N}$ vers p .

1.2 Lois absolument continues

Loi	Paramètre(s)	Densité	Espérance	Variance	Modélisation	Observations
Uniforme $\mathcal{U}([a, b])$	$a, b \in \mathbb{R}, a < b$	$f(x) = \frac{1}{b-a} \mathbb{I}_{[a,b]}(x)$	$\frac{a+b}{2}$	$\frac{(b-a)^2}{12}$	X est la variable aléatoire représentant un nombre choisi au hasard entre a et b .	Si $X \sim \mathcal{U}([0, 1])$, si F^{-1} désigne l'inverse généralisée de la fonction de répartition d'une loi P , alors $F^{-1}(X) \sim P$. F.c. alors $\varphi(t) = \sin(at)/(at)$ pour $\mathcal{U}([-a, a])$.
Exponentielle $\mathcal{E}(\lambda)$	$\lambda > 0$	$f(x) = \lambda e^{-\lambda x} \mathbb{I}_{[0, +\infty[}(x)$	$1/\lambda$	$1/\lambda^2$		Si $X \sim \mathcal{E}(\lambda)$, $X \sim \gamma(1, \lambda)$. F.c. $\varphi(t) = \lambda/(\lambda - it)$
Gamma $\gamma(p, \lambda)$	$p > 0, \lambda > 0$	$f(x) = \frac{\lambda^p}{\Gamma(p)} e^{-\lambda x} (\lambda x)^{p-1} \mathbb{I}_{[0, +\infty[}(x)$	p/λ	p/λ^2		Si $X_1 \sim \gamma(p_1, \lambda)$, $X_2 \sim \gamma(p_2, \lambda)$, X_1 et X_2 indépendantes, alors $X_1 + X_2 \sim \gamma(p_1 + p_2, \lambda)$. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, $\Gamma(n) = (n-1)!$
Beta I $\beta_1(a, b)$	$a > 0, b > 0$	$f(x) = \frac{1}{\beta(a,b)} (1-x)^{b-1} x^{a-1} \mathbb{I}_{[0,1]}(x)$	$\frac{a}{a+b}$	$\frac{ab}{(a+b+1)(a+b)^2}$	Si $X \sim \gamma(a, 1)$, $Y \sim \gamma(b, 1)$, X et Y indépendantes, alors $\frac{X}{X+Y} \sim \beta_1(a, b)$.	$\beta(a, b) = \frac{\Gamma(a)\Gamma(b)}{\Gamma(a+b)}$. Les statistiques d'ordre d'une loi $\mathcal{U}([0, 1])$ suivent des lois Beta I.
Beta II $\beta_2(a, b)$	$a > 0, b > 0$	$f(x) = \frac{1}{\beta(a,b)} \frac{x^{a-1}}{(1+x)^{a+b}} \mathbb{I}_{[0, +\infty[}(x)$	$\frac{a}{b-1}$ si $b > 1$	$\frac{a(a+b-1)}{(b-1)^2(b-2)}$ si $b > 2$	Si $X \sim \gamma(a, 1)$, $Y \sim \gamma(b, 1)$, X et Y indépendantes, alors $\frac{X}{Y} \sim \beta_2(a, b)$.	Si $X \sim \beta_1(a, b)$, $\frac{X}{1-X} \sim \beta_2(a, b)$ et réciproquement.
Weibull $W(a, \lambda)$	$a > 1, \lambda > 0$	$f(x) = a\lambda x^{a-1} e^{-\lambda x^a} \mathbb{I}_{[0, +\infty[}(x)$	$\frac{\Gamma(1+\frac{1}{a})}{\lambda^{\frac{1}{a}}}$	$\frac{\Gamma(1+\frac{2}{a}) - \Gamma^2(1+\frac{1}{a})}{\lambda^{\frac{2}{a}}}$	$X \sim W(a, \lambda)$ si $X^a \sim \mathcal{E}(\lambda)$	
Gaussienne ou normale $\mathcal{N}(m, \sigma^2)$	$m \in \mathbb{R}, \sigma^2 > 0$	$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}$	m	σ^2	Loi limite du théorème central limite.	Si $X \sim \mathcal{N}(m, \sigma^2)$, alors $\frac{X-m}{\sigma} \sim \mathcal{N}(0, 1)$. Si $X_1 \sim \mathcal{N}(m_1, \sigma_1^2)$, $X_2 \sim \mathcal{N}(m_2, \sigma_2^2)$, X_1 et X_2 indépendantes, alors $X_1 + X_2 \sim \mathcal{N}(m_1 + m_2, \sigma_1^2 + \sigma_2^2)$. F.c. $\varphi(t) = e^{imt - \frac{1}{2}\sigma^2 t^2}$.

Lois issues des lois gaussiennes

Loi	Paramètre(s)	Densité	Espérance	Variance	Modélisation	Observations
Cauchy		$f(x) = \frac{1}{\pi} \frac{1}{1+x^2}$			Si X_1 et X_2 sont indépendantes, de même loi $\mathcal{N}(0, 1)$, si $U \sim \mathcal{U}(\frac{\pi}{2}, \pi/2[$, X_1/X_2 et $\tan U$ suivent la loi de Cauchy	F.c. $\varphi(t) = e^{- t }$.
Log-normale	$m \in \mathbb{R}, \sigma^2 > 0$	$f(x) = \frac{1}{x\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(\ln x - m)^2}{2\sigma^2}} \mathbb{I}_{]0, +\infty[}(x)$	$e^{m+\sigma^2/2}$	$e^{2m+\sigma^2} (e^{\sigma^2} - 1)$	X suit la loi log-normale de paramètres (m, σ^2) si $\ln X \sim \mathcal{N}(m, \sigma^2)$.	
Chi-Deux $\chi^2(n)$	$n \in \mathbb{N}^*$	$f(x) = \frac{1}{2\Gamma(n/2)} e^{-x/2} \left(\frac{x}{2}\right)^{n/2-1} \mathbb{I}_{]0, +\infty[}(x)$	n	$2n$	Si X_1, \dots, X_n sont i.i.d. de loi $\mathcal{N}(0, 1)$, $X = X_1^2 + \dots + X_n^2 \sim \chi^2(n)$.	Si $X_1 \sim \chi^2(n_1)$, $X_2 \sim \chi^2(n_2)$, X_1 et X_2 indépendantes, alors $X_1 + X_2 \sim \chi^2(n_1 + n_2)$. Si $X \sim \chi^2(n)$, $X \sim \gamma(n/2, 1/2)$.
Student $T(n)$	$n \in \mathbb{N}^*$	$f(x) = \frac{\Gamma(\frac{n+1}{2})}{\sqrt{n\pi}\Gamma(\frac{n}{2})} \left(1 + \frac{x^2}{n}\right)^{-\frac{n+1}{2}}$	0 si $n > 1$	$\frac{n}{n-2}$ si $n > 2$	Si $X \sim \mathcal{N}(0, 1)$, $Y \sim \chi^2(n)$, X et Y indépendantes, alors $\frac{X}{\sqrt{Y/n}} \sim T(n)$.	Si $X \sim T(n)$, $\frac{X^2}{n} \sim \beta_2\left(\frac{1}{2}, \frac{n}{2}\right)$.
Fisher-Snedecor $\mathcal{F}(m, n)$	$m \in \mathbb{N}^*, n \in \mathbb{N}^*$	$f(x) = \frac{m^{\frac{m}{2}} n^{\frac{n}{2}}}{\beta\left(\frac{m}{2}, \frac{n}{2}\right)} x^{\frac{m}{2}-1} (n + mx)^{-\frac{n+m}{2}}$	$\frac{n}{n-2}$ si $n > 2$	$\frac{2n^2(m+n-2)}{m(n-2)^2(n-4)}$ si $n > 4$	Si $X \sim \chi^2(m)$, $Y \sim \chi^2(n)$, X et Y indépendantes, $\frac{X/m}{Y/n} \sim \mathcal{F}(m, n)$.	Si $X \sim \mathcal{F}(m, n)$, alors $1/X \sim \mathcal{F}(n, m)$.

2 Lois usuelles dans \mathbb{R}^n

2.1 La loi multinomiale

On répète n fois une expérience à k issues, de probabilités respectives p_1, \dots, p_k , de façon indépendante, et on considère pour tout $i = 1, \dots, k$, le nombre X_i de réalisations de l'issue i (parmi les n répétitions).

Définition 1 On dit que le vecteur aléatoire $X = (X_1, \dots, X_k)$ suit une loi multinomiale de paramètres (n, p_1, \dots, p_k) , et on note $X \sim \mathcal{M}(n, p_1, \dots, p_k)$. On a

$$P((X_1, \dots, X_k) = (x_1, \dots, x_k)) = \frac{n!}{x_1! \dots x_k!} p_1^{x_1} \dots p_k^{x_k}.$$

Propriétés.

Les variables marginales X_1, \dots, X_k sont linéairement dépendantes par construction : $\sum_{i=1}^k X_i = n$, et on a bien sûr $\sum_{i=1}^k p_i = 1$.

Chaque variable marginale X_i suit une loi binomiale $\mathcal{B}(n, p_i)$.

On a donc $E[X] = (np_1, \dots, np_k)$, et la matrice de variances-covariances de X est égale à

$$\Sigma_X = \begin{pmatrix} np_1(1-p_1) & -np_1p_2 & \dots & -np_1p_k \\ -np_1p_2 & np_2(1-p_2) & \dots & -np_2p_k \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -np_1p_k & -np_2p_k & \dots & np_k(1-p_k) \end{pmatrix}.$$

Remarque : Cette matrice Σ_X n'est pas inversible.

La loi multinomiale a toute son importance en statistique. Elle est notamment à la base d'un test très utilisé en statistique : le test du Chi-deux.

2.2 Vecteurs gaussiens - loi multinormale

Retour sur la loi gaussienne dans \mathbb{R} : Densités, forme des densités, centrage et réduction d'une v.a.r. gaussienne, quantiles des lois gaussiennes, loi gaussienne dégénérée.

2.2.1 Définitions - Premières propriétés

Définition 2 Un vecteur aléatoire de dimension k $X = (X_1, \dots, X_k)$ est dit gaussien si toute combinaison linéaire de ses variables marginales $a_1X_1 + \dots + a_kX_k$ est une v.a.r. gaussienne.

Proposition 1 La loi d'un vecteur aléatoire $X = (X_1, \dots, X_k)$ gaussien est entièrement déterminée par la donnée de son espérance $m_X = E[X]$ et de sa matrice de variances-covariances Σ_X . On note alors $X \sim \mathcal{N}_k(m_X, \Sigma_X)$.

La fonction caractéristique de la loi $\mathcal{N}_k(m_X, \Sigma_X)$ est donnée par $\varphi_X(t) = e^{it'm_X} e^{-\frac{1}{2}t'\Sigma t}$.

Proposition 2 Soit $X = (X_1, \dots, X_k)$ un vecteur gaussien. Par définition, les variables marginales X_1, \dots, X_k sont des v.a.r. gaussiennes. Mais la réciproque est fautive.

Preuve. On prend $X_1 \sim \mathcal{N}(0, 1)$, ε une variable aléatoire de Rademacher, c'est-à-dire qui prend les valeurs 1 et -1 avec probabilité $1/2$, et on pose $X_2 = \varepsilon X_1$. On peut voir que X_1 et X_2 sont des v.a.r. gaussiennes centrées réduites, mais que $X_1 + X_2$ n'est pas une variable gaussienne (notamment, on a $P(X_1 + X_2 = 0) \neq 0!$). Par conséquent (X_1, X_2) n'est pas un vecteur gaussien.

Proposition 3 Si X_1, \dots, X_k sont des v.a.r. gaussiennes **indépendantes**, alors le vecteur aléatoire $X = (X_1, \dots, X_k)$ est un vecteur gaussien.

Définition 3 Un vecteur aléatoire $X = (X_1, \dots, X_k)$ est dit gaussien centré réduit ou standard si $X \sim \mathcal{N}_k(0, I_k)$.

Proposition 4 $X = (X_1, \dots, X_k) \sim \mathcal{N}_k(m_X, \Sigma_X)$ si et seulement si X peut s'écrire $X = AY + m_X$, avec $Y \sim \mathcal{N}_k(0, I_k)$, A étant de taille $k \times k$, satisfaisant $AA' = \Sigma_X$ et $\text{rang}(A) = \text{rang}(\Sigma_X)$.
Si $X = (X_1, \dots, X_k) \sim \mathcal{N}_k(m_X, \Sigma_X)$, A une matrice de taille $l \times k$ et $B \in \mathbb{R}^l$, alors $AX + B \sim \mathcal{N}_l(Am_X + B, A\Sigma_X A')$. En particulier, le vecteur $\Sigma_X^{-1/2}(X - m_X)$ est gaussien standard.

2.2.2 Indépendance

Proposition 5 Soit $X = (X_1, \dots, X_k) \sim \mathcal{N}_k(m_X, \Sigma_X)$. Les variables marginales X_1, \dots, X_k sont indépendantes si et seulement si Σ_X est diagonale, autrement dit si et seulement si elles sont non corrélées.
Soit $Z = (X_1, \dots, X_p, Y_1, \dots, Y_q)$ un vecteur gaussien. Les vecteurs (X_1, \dots, X_p) et (Y_1, \dots, Y_q) sont indépendants si et seulement s'ils sont non corrélés.

Preuve. Utilisation de la fonction caractéristique.

Attention : on rappelle que ces propriétés sont fausses dans le cadre général des vecteurs aléatoires! Si on reprend l'exemple ci-dessus de $X_1 \sim \mathcal{N}(0, 1)$, et $X_2 = \varepsilon X_1$, alors les variables X_1 et X_2 sont non corrélées, mais dépendantes.

2.2.3 Densité

Proposition 6 Soit $X = (X_1, \dots, X_k) \sim \mathcal{N}_k(m_X, \Sigma_X)$. X admet une densité f si et seulement si $\det \Sigma_X \neq 0$, et on a

$$f(x_1, \dots, x_k) = \frac{1}{(\sqrt{2\pi})^k \sqrt{\det \Sigma_X}} e^{-\frac{1}{2}(x - m_X)' \Sigma_X^{-1} (x - m_X)},$$

avec $x = (x_1, \dots, x_k)'$.

Preuve. On a $Y = \Sigma_X^{-1/2}(X - m_X) \sim \mathcal{N}_k(0, I_k)$, donc ses variables marginales Y_1, \dots, Y_k sont des v.a.r. gaussiennes centrées réduites indépendantes. Y a donc pour densité

$$g(y) = \frac{1}{(2\pi)^{k/2}} e^{-\frac{1}{2} \sum_{i=1}^k y_i^2}.$$

Il suffit alors d'appliquer la formule du changement de variables. Le jacobien vaut $1/(\det \Sigma_X^{1/2}) = (\det \Sigma_X)^{-1/2}$, ce qui donne le résultat.

Exemple. Cas du vecteur gaussien de dimension 2 et lien avec le coefficient de corrélation linéaire.

Définition 4 Un vecteur gaussien X dont la matrice de variances-covariances a un déterminant nul est dit dégénéré.

2.2.4 Vecteurs gaussiens et loi du Chi-Deux

Rappels sur la loi du Chi-Deux.

Proposition 7 Si $X = (X_1, \dots, X_k) \sim \mathcal{N}_k(m_X, \Sigma_X)$, avec Σ_X inversible, alors $(X - m_X)' \Sigma_X^{-1} (X - m_X)$ suit une loi du $\chi^2(k)$.

Preuve. Il suffit ici aussi de voir que $\Sigma_X^{-1/2}(X - m_X) \sim \mathcal{N}_k(0, I_k)$.

Proposition 8 Soit $X = (X_1, \dots, X_k) \sim \mathcal{N}_k(0, I_k)$.

$X'AX$ suit une loi du χ^2 si et seulement si A est une matrice de projection orthogonale, i.e. $A^2 = A$. Le nombre de degrés de liberté du χ^2 est alors égal au rang de A .

Soit A, B deux matrices de projection orthogonale. $X'AX$ et $X'BX$ sont indépendantes si et seulement si $AB = 0$.

Théorème 1 (Théorème de Cochran) Soit $X = (X_1, \dots, X_k) \sim \mathcal{N}_k(0, I_k)$. Soit A_1, \dots, A_p p matrices symétriques de taille $k \times k$ telles que $\sum_{l=1}^p X' A_l X = X' X$ (décomposition de la norme de X au carré). Alors les trois conditions suivantes sont équivalentes :

- $\sum_{l=1}^p \text{rang}(A_l) = k$.
- Pour tout $l = 1, \dots, p$, $X' A_l X \sim \chi^2(\text{rang } A_l)$.
- Les $X' A_l X$ sont indépendantes.

Application aux projections sur des sous-espaces vectoriels de \mathbb{R}^k .

2.2.5 Théorème central limite (vectoriel)

Théorème 2 Soit $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de vecteurs aléatoires du second ordre indépendants, de même loi, d'espérance m , de matrice de variances-covariances Σ .

Alors

$$\sqrt{n} \left(\frac{\sum_{i=1}^n X_i}{n} - m \right) \rightarrow^{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0, \Sigma).$$